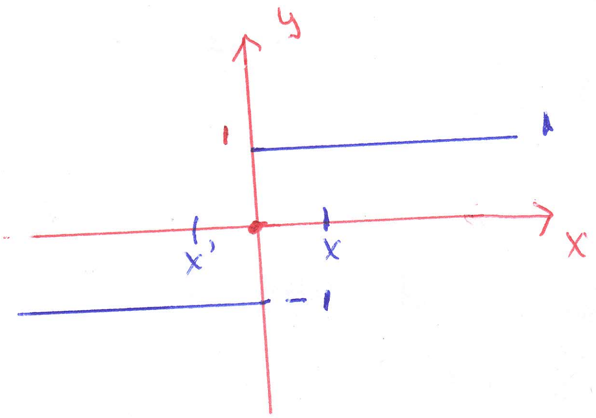
Ejemplo

En este ejemplo: Es posible que una función no tenga límite alguno en un punto x_0. Si x_0 es un punto de acumulación del dominio de f, entonces f no tiene un límite en x_0 si y solo si para todo L existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay un x en el dominio de f tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

Sea g la funcion cuya regla de correspondencia es

$$g(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

¿Existe el límite de g en 0?



Veamos este argumento intuitivo de que el límite no existe

Para $x > 0$ $|x| = x$ de modo que $g(x) = 1$ para $x > 0$

Para $x < 0$ $|x| = -x$ de modo que $g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ para $x < 0$

No hay ningun número L que satisface las condiciones de la definición de Límite.

Pues no importa cuan pequeño escojamos $\delta > 0$ habrá algunos valores de x en el intervalo $-\delta < x < \delta$ tales que $g(x) = 1$ y algunos tales que $g(x) = -1$.

Puntos $(x, g(x))$ de ambos tipos no pueden estar en la misma faja horizontal determinada de ancho menor que 2 de forma si $\epsilon \leq 1$ la banda horizontal determinada por las rectas $y = L \pm \epsilon$ debe excluir al menos uno de los tipos de puntos.

Para verlo analiticamente que $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe

Debemos mostrar que para cualquier numero L existe un $\epsilon > 0$ tal que para todos los numeros $\delta > 0$ hay una x tal que $0 < |x| < \delta$ y $|g(x) - L| \geq \epsilon$.

Consideramos los casos.

Caso 1

Si $L \geq 0$ tomamos $\epsilon = 1$ Para cualquier $\delta > 0$ tomamos un x_1 tal que $-\delta < x_1 < 0$.

Entonces $|g(x_1) - L| = |-1 - L| = |-1||1 + L| = 1 + L$

$$\geq 1 = \epsilon$$

Caso 2

Si $L < 0$ tomando $\epsilon = 1$ Para cualquier $\delta > 0$ tomamos un x_2 tal que $0 < x_2 < \delta$ entonces

$$|g(x_2) - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 = \epsilon$$