Teorema

Propiedades de continuidad

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$ entonces.

a) $f(x)+g(x)$ es continua en $x=a$

b) $f(x)-g(x)$ es continua en $x=a$.

c) $f(x)\cdot g(x)$ es continua en $x=a$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x=a$ si $g(a)\neq 0$ y tiene una discontinuidad en $x=a$ si $g(a)=0$

Demostración

a) Usando el teorema sobre las propiedades de límites

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$ entonces se tiene el

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Por lo consiguiente.

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a)+g(a)$$

b) Igual $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

Por lo consiguiente

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a) - g(a)$$

c) Tenemos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

Por el teorema de limites.

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$$

d) Consideremos ~~l~~os dos casos $g(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$

Caso $g(a) = 0$. En este caso $\frac{f(a)}{g(a)}$ no está definida por lo que la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una discontinuidad en $x = a$

Consideremos cuando $g(a) \neq 0$

Para demostrar que $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x=a$ se debe demostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por el teorema de límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$