Proposicion

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x \to 0} f(x_0 + x) = L$

Es decir si alguno de los límites existe, el otro límite también existe y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x + x_0)$$

Prueba.

Mostraremos la "ida" $\Longrightarrow$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to 0} f(x + x_0) = L$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $x \in \text{Dom} f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$

entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Si remplazamos a x por $x_0 + h$ vemos que siempre

$$0 < |x - x_0| = |x_0 + h - x_0| = |h| < \delta$$

Vemos que h está en el dominio de $f(x + x_0)$ y

$$0 < |h| < \delta$$

entonces

$$|f(x_0+h)-L| < \varepsilon$$

es decir $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim\limits_{x\to 0} f(x_0+x) = L$

Recíprocamente

$\lim\limits_{x\to 0} f(x+x_0) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

tenemos

$$\lim f(x+x_0) = L = \lim_{h\to 0} f(x_0+h)$$

$$|f(x_0+h)-L| = |f(x_0+(x-x_0))|-L||$$

$$= |f(x)-L| < \varepsilon.$$

$$0<|h|<\delta$$

$$0<|x-x_0|<\delta$$