El próximo teorema expresa que un símbolo de límite se puede brincar dentro de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos símbolos

Teorema

Si $f(x)$ es una función continua en b y $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$

Es decir

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Demostración

Se debe probar que para cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta$$

recordemos $\lim_{x\to a} g(x) = b$

Puesto que $f(x)$ es continua en b se tiene $\lim_{u\to b} f(u) = f(b)$ y en consecuencia

Puede encontrarse un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |u - b| < \delta_1$$

En particular si $u = g(x)$, entonces

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |g(x) - b| < \delta_1$$

Pero como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ y en consecuencia

existe un numero $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - b| < \delta_1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Por tanto si x satisface la condicion

$0 < |x - a| < \delta$ entonces se sigue que

$|g(x) - b| < \delta_1$ lo cual obtenemos

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon$$

Terminando la demostración