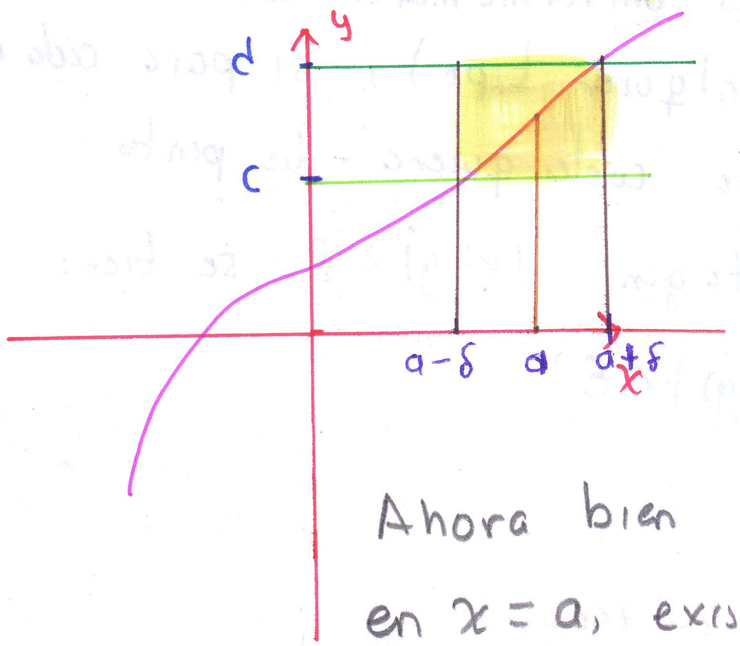
Teorema

Si f es una función continua en $x=a$ y $c < f(a) < b$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $c < f(x) < b$ para toda $x \in \text{Dom } f$ que satisface $|x-a| < \delta$

Prueba.



Sea $\varepsilon = \min\{b-f(a), f(a)-c\}$

entonces

$$c \leq f(a) - \varepsilon < f(a) < f(a)+\varepsilon \leq b$$

Ahora bien como f es continua en $x=a$, existe para el $\varepsilon>0$ tomando un $\delta>0$ tal que siempre que x esté dominio de f y $|x-a|<\delta$

entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ o

$$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$$

Combinando

$$a \leq f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \leq b$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}\, f$ que satisface

$$|x-a| < \delta$$