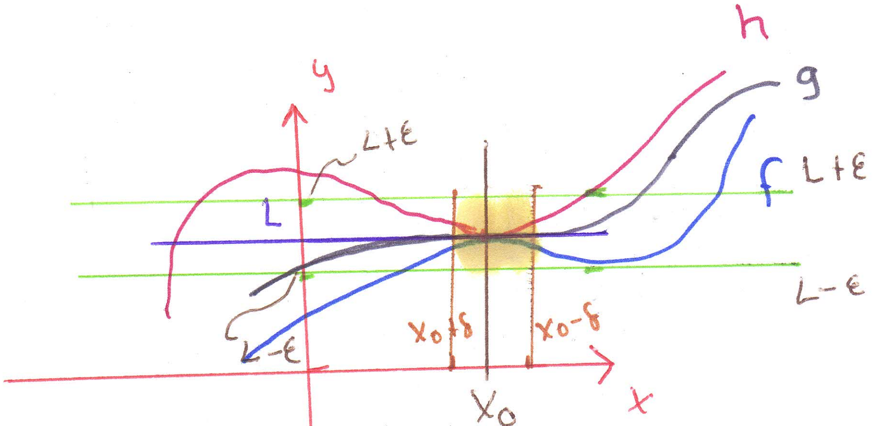
Teorema

Si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que para todo $x \neq x_0$ en I

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$

entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

Prueba.



Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$

entonces $|f(x) - 4 < \varepsilon$ ó $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ pues

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Tenemos también que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$

entonces para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$0 < |x - x_0| < \delta_2$ entonces $|h(x) - 2| < \varepsilon$ ó $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

Supongamos que δ_1 y δ_2 se han elegido tan pequeños

que los intervalos $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ y $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$

que están contenidos en I

Si δ es el más pequeño de δ_1 y δ_2

entonces para $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

$$|g(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$