Teorema

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $a < L < b$, entonces

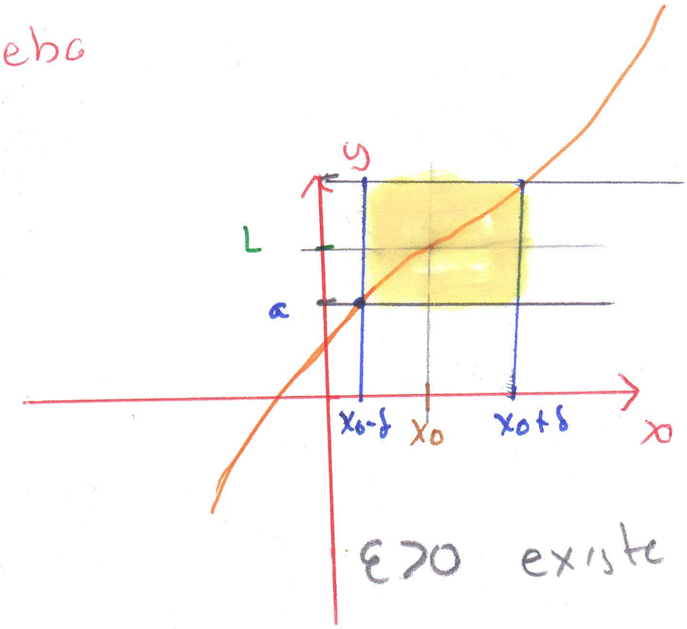
existe $\delta > 0$ tal que

$$a < f(x) < b$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ que satisface

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Prueba



Tomemos a

$$\varepsilon = \min\{b - L, L - a\}$$

entonces

$$a \leq L - \varepsilon < L < L + \varepsilon \leq b$$

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $x \in \text{Dom } f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{o}$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

$$a \leq L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \leq b$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ satisface

$$0 < |x - x_0| < \delta$$