Se puede hacer de 3 forma distinta

Una acotando a ε y la otra sin

acotar pero se hace "jugando con δ" y la clásica.

Prueba con $0<\varepsilon<1$

Tenemos para toda $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$

tal que $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)g(x)-LM|<\varepsilon$.

Como $\varepsilon>0$ se pide que $0<\varepsilon<1$ existe.

un $\delta>0$ tal que si

$$0<|x-a|<\delta \text{ entonces}$$

$$|f(x)-L| = |f(x)-L-0|<\varepsilon \text{ y}$$

$$|g(x)-M| = |g(x)-M-0|<\varepsilon$$

18

Podemos escribir a

$$f(x)\cdot g(x) = \left[(f(x)-L)\cdot(g(x)-M) + (Lg(x)+Mf(x)) \right] - LM$$

$$= f(x)g(x) - \boxed{Mf(x)} - \boxed{Lg(x)} + \boxed{LM} + \boxed{Lg(x)}$$

$$+ \boxed{Mf(x)} - \boxed{LM}$$

Como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L

y límite de $g(x)$ cuando x tiende a es M

tenemos

$$\lim_{x\to a} (f(x)-L) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to a} (g(x)-M) = 0$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$

entonces

$$|f(x) - L - 0| < \varepsilon \quad y \quad |g(x) - M - 0| < \varepsilon.$$

lo cual implica

$$|[(f(x)-L)\cdot(g(x)-M)] - 0| = |(f(x)-L)\cdot(g(x)-M)|$$

$$< \varepsilon\cdot\varepsilon = \varepsilon^2 < \varepsilon < 1$$

Por lo cual

$$\lim_{x \to a} \left((f(x)-L) \cdot (g(x)-M) \right) = 0$$

Tenemos que si $p \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$

entonces $\lim_{x \to a} p\, f(x) = pL$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ si $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$|p\, f(x) - pL| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon / |p|$$

$$|pf(x) - pL| = |p(f(x)-L)| < \frac{\varepsilon}{|p|}$$

$$|p||f(x)-L| < \varepsilon$$

$$|p| \left| \frac{\varepsilon}{p} \right| < \varepsilon$$

$$|x-a| < \delta$$

Por lo cual

$$\lim_{x \to a} L\, g(x) = LM \quad y$$

$$\lim_{x \to a} M\, f(x) = ML$$

Por lo que vimos anteriormente

Ahora

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} \big((f(x)-L)\cdot(g(x)-M) + [L g(x) + M f(x)] - LM \big)$$

$$= \Big(\lim_{x \to a} (f(x)-L)\cdot(g(x)-M) + \lim_{x \to a} L\, g(x) + \lim_{x \to a} M f(x) - LM \Big)$$

$$= 0 + LM + LM - LM = LM$$