Prueba con el juego de los δ (sin acotar ε)

Sea $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta$$

Para encontrar δ será útil expresar en una forma diferente

si a $f(x)$ y $g(x)$ lo reescribima como

$$f(x) = f(x) + 0 = f(x) - L + L = L + f(x) - L$$
$$g(x) = g(x) + 0 = g(x) - M + M = M + g(x) - M$$

Entonces

$$|f(x)g(x) - LM| = |(L + f(x) - L)(M + g(x) - M) - LM|$$
$$= |\cancel{LM} + L(g(x)-M) + (f(x)-L)\cdot M$$
$$+ (f(x)\cdot L)(g(x)-M) - \cancel{LM}|$$

$$= |L(g(x)-M) + M\cdot(f(x)-L) + (f(x)\cdot L)(g(x)-M)|$$

Como tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

Es posible encontrar $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ y $\delta_4 > 0$ tal que

si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}$

Si $0<|x-a|<\delta_3$ entonces $|g(x)-M|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

Si $0<|x-a|<\delta_4$ entonces $|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}$

Además todas las desigualdades de las derecha de cada uno de los enunciados se cumplen si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 se sustituye por cualquier numero positivo δ que sea menor que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 al mismo tiempo

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$$

entonces regresando a

$$|f(x)\cdot g(x)-LM = |L(g(x)-M)+M\cdot(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)|$$

$$\leq |L(g(x)-M)|+|M(f(x)-L)|+|(f(x)-L)(g(x)-M)|$$

$$\leq |L||g(x)-M|+|M||f(x)-L|+|f(x)-L|\cdot|g(x)-M|$$

$$<|L|\frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}+|M|\frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$=\frac{\varepsilon}{3}\frac{|L|}{(1+|L|}+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{|M|}{(1+|M|)}+\frac{\varepsilon}{3})$$

Como $|L|<|L|+1$ y $|M|<|M|+1$

entonces

$$\frac{|L|}{1+|L|} < 1 \quad y \quad \frac{|M|}{1+|M|} < 1$$

Tenemos

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para δ seleccionado