21/

La clásica

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$

entonces $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$

Vamos a tratar de expresar a $f(x)g(x) - LM$ en

términos de $|f(x)-L|$ y $|g(x)-M|$

A la desigualdad

$|f(x)g(x) - LM|$ le sumaremos un cero

$$|f(x)g(x) + 0 - LM| = |f(x)g(x) - Mf(x) + Mf(x) - LM|$$

$$= |f(x)g(x) - Mf(x) + Mf(x) - LM|$$

$$= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM|$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM|$$

$$= |f(x) \cdot (g(x) - M)| + |f(x) - L||M|$$

$$= |f(x)| \cdot |g(x) - M| + |f(x) - L||M|$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta_1 > 0$

tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < 1$

$||f(x)| - |L|| < 1$ entonces $|f(x)| < 1 + L$

Para $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tenem.

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2)$$

Para $\delta_3 > 0$

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_3$$

Tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

si $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - M| + |M| |f(x) - L|$$

$$\leq (1+|L|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|M|}{|M+1|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Pero $|M| < |M| + 1$ entonces $\frac{|M|}{|M|+1} < 1$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$$