22 /

d) Sea $g(x)$ una función y $M \neq 0$ con $\lim_{x\to a} g(x) = M$

Entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

Sea $\varepsilon > 0$ Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe $\delta_1 > 0$

tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

lo cuál tenemos que

$$|M| = |0 + M| = |-g(x) + g(x) + M|$$
$$= |g(x) + (M - g(x))| \leq |g(x)| + |M - g(x)|$$
$$= |g(x)| + |-(g(x) - M)|$$
$$= |g(x)| + |g(x) - M|$$

$$|M| \leq |g(x)| + |g(x) - M| < |g(x)| + \frac{|M|}{2}$$

$$|M| - \frac{|M|}{2} < |g(x)|$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| \qquad \text{ó}$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$$

De manera semejante, existe un $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2} \varepsilon$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-a| < \delta$ tenemos que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x) M} \right| = \frac{1}{|M|} \left| \frac{M - g(x)}{g(x)} \right|$$

$$= \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |-(g(x) - M)|$$

$$= \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |g(x) - M|$$

$$= \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot \frac{|M|^2}{2} \varepsilon$$

$$= \epsilon$$

Por lo que $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ ⌋⌋