f) Limite de una potencia k

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n$

Esta prueba la haremos por induccion matemática y usando la propiedad c

Para $n=1$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Para $n=2$

$$\lim_{x\to a} (f(x))^2 = \lim_{x\to a} (f(x)\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$= L \cdot L = L^2$$

$$\therefore \lim (f(x))^2 = L^2$$

Ahora suponemos que es valido para $n=k$, es decir $\lim_{x\to a} (f(x))^k = L^k$

Lo probaremos para el sucesor de k quien es $k+1$

23/

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{k+1} = \lim_{x \to a} f(x)^{k} \cdot f(x)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x)^{k} \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$= L^{k} \cdot L$$

$$= L^{k+1}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} (f(x))^{k+1} = L^{k+1}$$

La cual es valido para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{n} = L^{n}$$