Teorema

Teorema de Bolzano

Sea f una funcion continua en un intervalo cerrado y acotado $[c, b]$ Si $f(c) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un punto $a \in (c, b)$ tal que.

$$f(a) = 0$$

Demostracion

Supongamos que $f(c) < 0 < f(b)$

Mostremos que existe un punto a en (c, b) tal que $f(a) = 0$.

Vamos a proceder por contradicción

Si se tuviese $f(x) \neq 0$ para toda $x \in (c, b)$ entonces la funcion $g(x) = \frac{1}{|f(x)|}$ estaría definida

y seria continua en todo el intervalo $[c, b]$

Por el teorema de Weierstrass que dice.

"Si f es una funcion continua en un intervalo cerrado y acotado $[c, b]$, entonces f es acotada", es decir existiria $M > 0$ tal que $g(x) = \frac{1}{|f(x)|} \leq M$ para toda

$x \in [c, b]$

Así que se tendría $|f(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$

para todo $x \in [a, b]$

Como f es uniformemente continua en $[a, b]$

para $\varepsilon = \frac{1}{M}$, existe $\delta > 0$ tal que

$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{M}$ siempre que se tenga

$|x - y| < \delta$

Tomemos n tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$

Los puntos $c_0 = a$, $a_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$a_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, c_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}$

$c_n = b$

Cumple $|c_k - c_{k-1}| < \delta$ para todo $k = 1, \ldots, n$

así que $|f(c_k) - f(a_{k-1})| < \frac{1}{M}$ y también

$f(c_k) - f(x) < \frac{1}{M}$ para todo $x \in [c_{k-1}, c_k]$

Como $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe k

tal que $f(c_{k-1}) < 0 < f(c_k)$

Por consiguiente se tiene

$$|f(c_k)| = |f(c_k) - 0| < |f(c_k) - f(c_{k+1})| < \frac{1}{M},$$

pero contradice la desigualdad $|f(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$

que ya teníamos, la cual debería cumplirse

para todo $x \in [c, b]$. La contradicción se

obtiene al suponer $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$

por tanto se debe tener que existe algún

punto a en (c, b) donde $f(a) = 0$

Esto prueba que $f(c) < 0 < f(b)$

Sea $f(b) < 0 < f(c)$ es usar $g(x) = -f(x)$

tenemos que $g(c) < 0 < g(b)$

y aplicamos lo que vimos.