Proposición

Límite de una función compuesta

Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to L} f(x) = f(L)$$

entonces.

$$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$$= f(L)$$

Prueba.

Para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$ siempre que

$0 < |x-a| < \delta$

Como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a L es $f(L)$, se sabe que existe $\delta > 0$ tal que

$|f(u) - f(L)| < \varepsilon$ siempre que $|u-L| < \delta_1$

Además, como el límite de $g(x)$ cuando $x\to c$ es L se sabe que existe $\delta_1 > 0$ tal que

25

$|g(x) - L| < \delta_1$ siempre que $0<|x-a|<\delta$

Si sustituimos a $u = g(x)$ se tiene que.

$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ siempre que

$$0<|x-c|<\delta$$