Teorema

Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es una funcion continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ entonces f es acotada. De hecho existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2)$$

En otras palabras $f(x)$ alcanza un valor máximo y un valor minimo en punto de $[a,b]$

Demostración

Veamos primero que f es acotada

Como f es uniformemente continua, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$, tal que siempre que se tenga dos punto $x, y \in [a,b]$ que satisfacen $|x-y| < \delta$ se debe tener $|f(x)-f(y)| < 1$

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, tales que la longitud de cada subintervalo sea menor que δ.

Es decir, sea n tal que $\frac{b-c}{n} < \delta$

Consideremos los puntos

$$c_0 = c, \quad c_1 = c + \frac{b-c}{n}, \quad c_2 = c + 2\frac{b-c}{n},$$

$$c_3 = c + 3\frac{b-c}{n}, \ldots$$

$$c_{n-1} = c + (n-1)\frac{b-c}{n}, \quad c_n = b$$

Para cada intervalo $I_k = [c_{k-1}, c_k]$

y cada $x \in I_k$ se tiene entonces

$$|f(x) - f(c_k)| < 1$$

Luego, para toda $x \in I_k$ se cumple

$$|f(x)| = |f(x) + 0| = |f(x) - f(c_k) + f(c_k)|$$

$$\leq |f(x) - f(c_k)| + |f(c_k)|$$

De donde

$$|f(x)| < 1 + |f(c_k)|$$

Por tanto si tomamos el mayor de los

numeros $|f(c_1)|, |f(c_2)|, |f(c_3)|, \ldots |f(c_n)|,$

digamos que es $|f(c_N)|$

Con lo cuál

$$|f(x)| < 1 + |f(c_N)|$$

para todo $x \in [a, b]$. Esto prueba que

f es acotada

Probemos ahora que f alcanza un valor máximo, quiere decir que un punto $y \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in [a, b]$

Vamos a elegir un punto cualquiera $x_1 \in [a, b]$ y una cota superior M_1 de f en $[a, b]$.

entonces $f(x_1)$ es precisamente el valor máximo buscado y f lo toma en $y = x_1$. Supongamos que este no es caso (contradicción)

Entonces, tenemos $f(x_1) < M_1$. Tomemos el punto medio entre $f(x_1)$ y M_1, es decir $\dfrac{M_1 + f(x_1)}{2}$

Si este numero es una cota superior de f en $[c,b]$, entonces hacemos $M_2 = \frac{M_1 + f(x_1)}{2}$,

en caso contrario existira un $x_2 \in [c,b]$ tal que $f(x_1) < \frac{M_1 + f(x_1)}{2} < f(x_2) \leq M_1$ y hacemos $M_2 = M_1$ De esta forma tenemos, como al principio $f(x_2) \leq M_2$ Continuando con este proceso de biseccion, o bien obtenemos un punto $y = x_N$ donde la funcion tiene un valor máximo o bien construimos dos sucesiones (M_n) y $(f(x_n))$ de las cuales, la primera será decreciente y la segunda será estrictamente creciente, tales que

$$\lim_{n\to\infty} (M_n - f(x_n)) = 0$$

Como la sucesion (x_n) esta acotada, pues todo los elementos pertenecen al intervalo $[c, b]$ tiene una subsucesion convergente, digamos (x_{n_k}). Sea $y = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Este punto pertenece al intervalo $[c, b]$ y como f es continua en y se tiene

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$$

Entonces tambien se tiene.

$$\lim_{k\to\infty} M_{n_k} = f(y)$$

pues $\lim_{n\to\infty} (M_n - f(x_n)) = 0$ Finalmente

de la desigualdad

$$f(x) \leq M_n$$

que vale para todo n y todo $x \in [c, b]$ se sigue $f(x) \leq \lim_{k\to\infty} M_k = f(y)$

para todo $x \in [c, b]$ Esto prueba que $f(y)$ es un

Valor máximo de f en $[a, b]$

Para probar que existe un valor de f es mínimo

Se consigue al considerar la funcion $g = -f$.

Con lo cual pruebo el teorema.