Proposición

Teorema de continuidad uniforme

Si una funcion f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que siempre que se toman dos puntos $x, y \in [a, b]$ con $|x-y| < \delta$ se tiene $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Demostración

Esta demostracion lo haremos por contradicción

Supongamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que no existe $\delta > 0$ que cumple las condiciones del teorema.

Es decir para cada $\delta > 0$ es posible encontrar algun par de puntos x_δ, y_δ en $[a, b]$ tales que

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{pero} \quad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

En particular, para cada δ de la forma $\delta_n = \frac{1}{n}$, existe un par de puntos x_n, y_n en $[a, b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{pero} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Veamos que esto nos lleva a la contradiccion con la continuidad de f

Tenemos dos sucesiones (x_n) y (y_n) en $[a, b]$ obviamente acotadas. Lo importante de esta prueba es que para estas dos sucesiones es posible construir dos subsucesiones monotonas respectivamente convergentes.

Una subsución de (C_n) es cualquier sucesion de la forma (C_{n_k}), donde (n_k) es una sucesion creciente de naturales. En palabras comunes, una subsucesion de (C_n) es cualquier sucesion que se obtiene omitiendo cualquier numero finito o infinito de términos de esta.

Ahora probemos que toda sucesión acotada tiene una subsucesión monótona (creciente o decreciente). Supongamos (c_n) acotada. A un índice N lo llamamos cumbre o pico si $c_N > c_n$ para todo natural $n > N$ (es decir, si c_N es mayor que todos sus sucesores).

Hay dos posibilidades: que (c_n) tenga un número finito de índice cumbre o que tenga un número infinito..

Caso

Si tiene un número finito digamos $N_1, N_2, \dots$ N_m, entonces ningún entero $n > N_m$ es cumbre. Si elegimos $n_1 > N_m$, existe $n_2 > n_1$ tal que $c_{n_1} \leq c_{n_2}$ pero también existe $n_3 > n_2$ tal que $c_{n_2} \leq c_{n_3}$. Para continuar con el proceso, construimos una sucesión (c_{n_k}) creciente.

Por otro lado, si existe una infinidad de indices cumbres digamos (N_k) entonces tenemos $c_{N_1} > c_{N_2} > c_{N_3} > \dots$ así que la sucesión (c_{N_k}) es estrictamente decreciente.

En cualquiera de los casos tenemos una subsucesión de (c_n) monotona

Sean entonces subsucesiones monotonas (x_{N_k}) y (y_{N_k}) de (x_n) y (y_n) respectivamente. Estas sucesiones son convergentes digamos

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{N_k} \quad y \quad y = \lim_{k\to\infty} y_{N_k}$$

Estos dos límites son elementos del intervalo $[a,b]$ y también como f es continua en $[a,b]$ tenemos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{N_k}) \quad y \quad y = \lim_{k\to\infty} f(y_{N_k})$$

De la condicion $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ la cual se cumple para todo n natural se sigue que ambas sucesiones (x_{N_k}) y (y_{M_k}) que tienen el mismo limite, es decir $x = y$ Entonces tenemos

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{N_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{N_k})$$

O sea

$$\lim_{k\to\infty} [f(x_{N_k}) - f(y_{N_k})] = 0 \quad \nabla$$

No puede ser pues supusimos que

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

la cual se cumple para todo n natural

Con lo cual hemos probado el teorema