Demostración

Vamos a proceder como lo hicimos en la unicidad del límite

Hagamos primero el límite lateral derecho

Tenemos que

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $a < x < a + \delta_1$ entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ y

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, $a < x < a + \delta_2$ entonces $|f(x) - L_2| < \varepsilon$

Lo que veremos es para todo $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta$ entonces $|L_1 - L_2| < \varepsilon$.

$|L_1 - L_2| = |L_1 + 0 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$

$\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = |-| -L_1 + f(x)|$
$+ |f(x) - L_2|$

$= |-L_1 + f(x)| + |f(x) - L_2|$

$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$

Como $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

Entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ para
$a < x < a + \delta_1$ entonces $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ para $a < x < a + \delta_2$
entonces $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando
$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore |L_1 - L_2| < \varepsilon$

$\therefore L_1 = L_2$ en el limite lateral derecho

Ahora hagamos el límite lateral izquierdo

Tenemos que

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $a - \delta_1 < x < a$

entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ y también

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, $a - \delta_2 < x < a$

entonces $|f(x) - L_2| < \varepsilon$

Vamos a ver que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

tal que $a - \delta < x < a$ entonces

$|L_1 - L_2| < \varepsilon$

$$|L_1 - L_2| = |L_1 + 0 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$

$$\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = |-(-L_1 + f(x))| + |f(x) - L_2|$$

$$= |-L_1 + f(x)| + |f(x) - L_2|$$

$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Como $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

Quiere decir para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ para

$a - \delta_1 < x < a$ entonces $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

También $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ para

$a - \delta_2 < x < a$ entonces $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si tomamos el minimo es decir

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ con lo cual

$a - \delta < x < a$ con lo cual

$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

regresando

$\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore |L_1 - L_2| < \varepsilon$

$\therefore L_1 = L_2$ en el limite lateral izquierdo