Ejemplo

Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} |x|$$

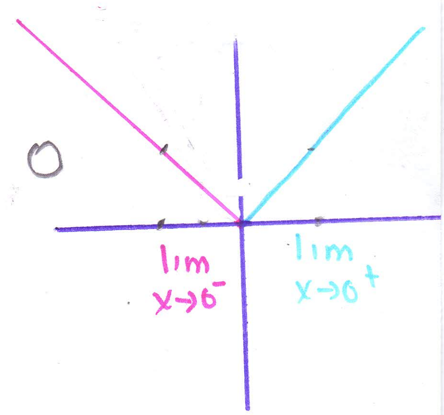
Por definicion de valor absoluto tenemos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tenemos que utilizar limites laterales, ya que la funcion valor absoluto esta definido por la 2 expresiones diferentes según nos acercamos a cero por la derecha o por la izquierda

limite lateral izquierdo

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{x \to 0} -x = 0$$



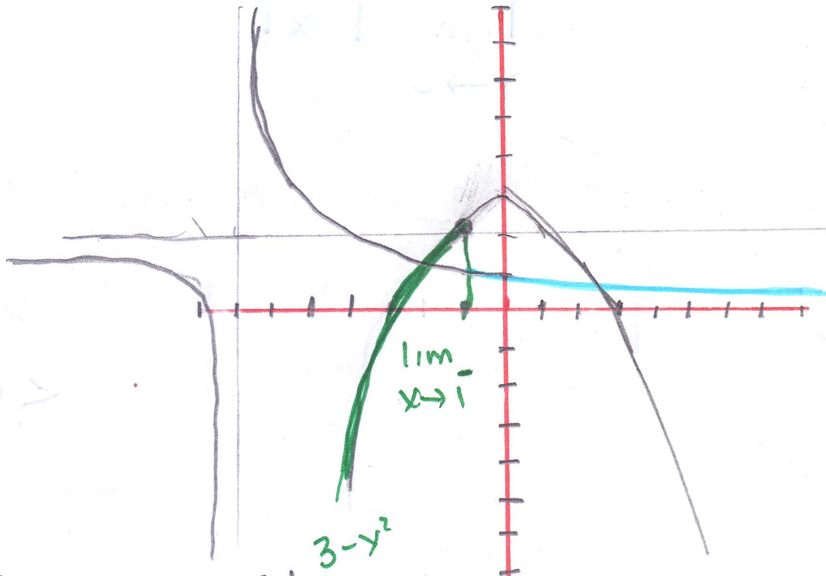
limite lateral derecho

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{x \to 0} x = 0$$

con lo cual $0 = \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0} |x|$

Ejemplo

$$\lim_{x \to -1} f(x) \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{2}{x+7} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Como la funcion esta definido por tramos vamos a usar limites laterales.

→ Izquierdo

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to -1} (3 - x^2) = 2$$

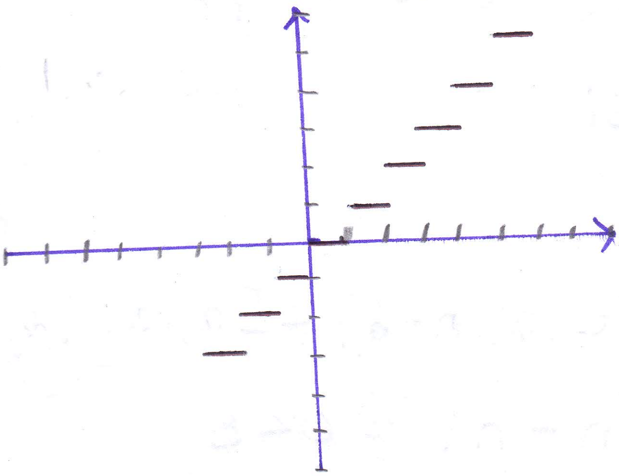
→ Derecho

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{x+7} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo

¿Existe el límite para n un número entero de $\lim_{x \to n} [x]$?, $[\ ]$ es la función menor entero

La gráfica de esta función



$\lim_{x \to n} [x]$

Si tomamos el límite lateral izquierdo

$$\lim_{x \to n^-} [x] = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} [x]$$

$$= \lim_{x \to n} (n-1)$$

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|[x] - (n-1)| < \varepsilon$

si $n - \delta < x < n$

si $\delta \leq 1$ entonces $x \in [n-1, n) \subset [n-1, n)$ y

$$|[x] - (n-1)| = |n-1 - (n-1)| = 0 < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ De donde

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n-1$$

Para el límite lateral derecho

$$\lim_{x\to n^+} [x] = \lim_{\substack{x\to n \\ x>n}} [x] = \lim_{x\to n} n$$

Para $x \in [n, n+1)$

Si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$|[x] - n| < \varepsilon$ si

$n < x < n+\delta$

Si $\delta \leq 1$ entonces $x \in (n, n+\delta) \subset [n, n+1)$ y

$|[x] - n| = |n - n| = 0 < \varepsilon$

para todo $\varepsilon > 0$. De donde

$$\lim_{x\to n^+} [x] = n$$