## Teorema

Sea $f$ una función definida al menos en una vecindad de un punto $a$ excepto posiblemente en $a$.

Si existen los límites laterales

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

son iguales entonces existe el $\lim_{x\to a} f(x)$

Además se tiene el $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces existe los limites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y ambos son iguales a $\lim_{x\to a} f(x)$

## Prueba

La ida "$\Rightarrow$"

Tenemos $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Por demostrar $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$

Como $\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$

Quiere decir

a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, tal que

$a - \delta_1 < x < a$ entonces

$|f(x) - L| < \varepsilon$

b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$a < x < a + \delta_2$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Tomemos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

Entonces

$a - \delta_1 < x < a$ para $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$a < x < a + \delta$ para $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$-\delta_1 < x - a$ y $x - a < a + \delta$

$-\delta_1 < x - a < a + \delta$

entonces $|x - a| < \delta$

32 /

El regreso "$\Leftarrow$"

Por demostrar $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe.

y son iguales.

Por demostrar que Para todo $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$

tal que

a) $a-\delta < x < a$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$

b) $a < x < a+\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$

Inciso a)

Sea $\varepsilon>0$,

$|f(x)-L|<\varepsilon$ por el limite $\lim_{x\to a} f(x)=L$

existe un $\delta>0$ tal que

$0<|x-a|<\delta$ o es decir

$-\delta < x-a < \delta$ con lo cual

$-\delta < x-a$ y $x-a<\delta$

$-\delta < x-a < 0$

$x-\delta < x < a$ con lo cual

$a - \delta < x < a$ entonces

$|f(x) - L| < \varepsilon$ y

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

2) $0 < x - a < \delta$

$a < x < \delta + a.$

entonces

$|f(x) - L| < \varepsilon$ y

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

existen

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$