

Proposición

(para tema de continuidad)

Sea f y g dos funciones continuas en un intervalo que contiene a un punto a . Si $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ y existe un intervalo abierto que contiene a a tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$, entonces la gráfica de la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = a$

Demostación

Vamos a considerar que $f(a) > 0$ y existe una $b > a$ tal que $a < x < b$ implica que $g(x) > 0$

Entonces, para $M > 0$ se elige un δ_1 tal que

$$0 < x - a < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

y un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad 0 < g(x) < \frac{f(a)}{2M}$$

Ahora sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ Entonces

$$0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(a)}{2} \left(\frac{2M}{f(a)} \right) = M$$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ y la recta $x = a$ es una asíntota vertical