Ejemplo

Verifica que $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$

Lo haremos en dos casos si $a=0$ y $a \neq 0$

Caso $a = 0$

Por demostrar que $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|x-0| = |x| < \delta$

entonces $|\sqrt[3]{x} - 0| = |\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$

Tenemos $\varepsilon > 0$ entonces $|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$

si $|x| < \varepsilon^3$ De donde $\delta = \varepsilon^3$

entonces $|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$

Siempre que $0 < |x-0| < \delta$

y por tanto $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

Caso 2 si $a \neq 0$

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = |1 \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})|$$

$$= \left| \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{a})^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{a})^2} \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{a})^2} \right| \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{a})^2 \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}$$

$$= \left| \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{a})^2} \right| \cdot |x-a| = |g(x)| \cdot |x-a|$$

$$|g(x)| = \frac{1}{|x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}}$$

Como $a \neq 0$ existe un η tal que $|x-a| < \eta$

entonces x y a tienen el mismo signo y

$xa > 0$

$|x-a| < \eta \quad |g(x)| < a^{-2/3}$

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = |g(x)|\,|x-a| < a^{-2/3}|x-a| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x-a| < \delta$

donde $\delta = \min\{\eta, \varepsilon a^{2/3}\}$ Por tanto $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$