c) Disipación del alcanfor blanco

El alcanfor blanco, cuya formula es $C_{10}H_8$, también llamado naftalina, es un sólido blanco que se sublima con facilidad. Para su uso comercial, se produce en forma de pequeñas esferitas, las cuales antiguamente eran usadas para evitar la polilla en los roperos. Mientras el alcanfor se sublima o se disipa, el volumen de las esferas disminuye; así que el volumen es una funcion del tiempo. Podemos medir la disipacion por la cantidad de volumen que se pierde por unidad de tiempo.

Si $V(t_0)$ representa el volumen de la esfera en un instante t_0 y $V(t)$ representa el volumen en un instante posterior t, entonces el volumen disipado es $V(t)-V(t_0)$

Esta diferencia es negativa pues $V(t_0) > V(t)$

La perdida promedio de volumen por unidad de tiempo en el intervalo $[t_0, t]$ es entonces.

$$\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}.$$

El cociente anterior es una razon de cambio promedio y en este caso se trata de una cantidad negativa La razón de cambio instantanea, en el instante t_0 es un limite.

$$\lim_{t\to t_0} \frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}.$$

Es natural suponer que la disipacion de la esfera depende de manera natural del área o la superficie expuesta a la interperie. Esto significa que la razon de cambio con la que disminuye el volumen respecto al tiempo, es proporcional a la superficie de la esfera.

Esta ley de disipación se traduce en

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = k\, s(t_0)$$

donde k es una constante de proporcionalidad, con valor negativo, que se puede obtener en forma experimental

Suponiendo que la esfera de naftalina tiene originalmente un radio $R = 1cm$ así que el volumen originalmente es $v_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (1)^3 cm = \frac{4}{3}\pi$

Denotemos por $r(t)$ el radio de la esfera en cualquier instante t mientras se sublima entonces

$$v(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

La superficie de la esfera es $s(t) = 4\pi r^2(t)$

Tenemos entonces

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = k\, s(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(t) - \frac{4}{3}\pi r^3(t_0)}{t - t_0} = 4k\pi r^2(t_0)$$

Simplificando los coeficientes.

$$\frac{4}{3}\lim_{t \to t_0} \frac{r^3(t) - r^3(t_0)}{t - t_0} = 4 k r^2(t_0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{r^3(t) - r^3(t_0)}{t - t_0} = 3 k r^2(t_0)$$

Tenemos que la hipotesis de disipacion se traduce como

La razón de cambio del cubo del radio es proporcional al triple del cuadrado del radio