

Ejemplos

a) Derivada de una función constante

Sea $f(x) = c$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

b) Función identidad

Sea la función $f(x) = x$ y x_0 un punto real fijo

Tenemos

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h - x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

c) Función lineal $f(x) = ax + b$

Sea $f(x) = ax + b$ con a, b constante.

Sea x_0 un punto real fijo. Tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0+h) + b - (ax_0 + b)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

d) Sea $f(x) = x^2$ y x_0 cualquier número real fijo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0+h = 2x_0$$

e) Sea $f(x) = x^n$, donde n es natural y x_0 es cualquier número real

$$(x_0^n)' = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + n(n-1) x_0^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(n x_0^{n-1} + n(n-1) x_0^{n-2} h + \dots + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} n x_0^{n-1} + n(n-1) x_0^{n-2} h + \dots + h^{n-1}$$

$$= n x_0^{n-1}$$