Definición

Sea f una funcion definida en un conjunto D y $a \in D$ tal que existe una vecindad abierta de a contenida en D. Si existe una recta con ecuacion de la forma $y = m(x-a) + f(a)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [m(x-a) + f(a)]}{x-a} = 0$$

diremos que f es derivable en a y a la pendiente m se le llama la derivada de f en el punto a el cual denotaremos por cualquiera de los símbolos

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a) \quad o \quad D_f(a)$$

Esta definicion anterior está relacionada con una interpretación geométrica de la derivada.
La derivada f'(a) de una función f en el punto a es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (a, f(a))

La ecuación de la recta tangente es entonces

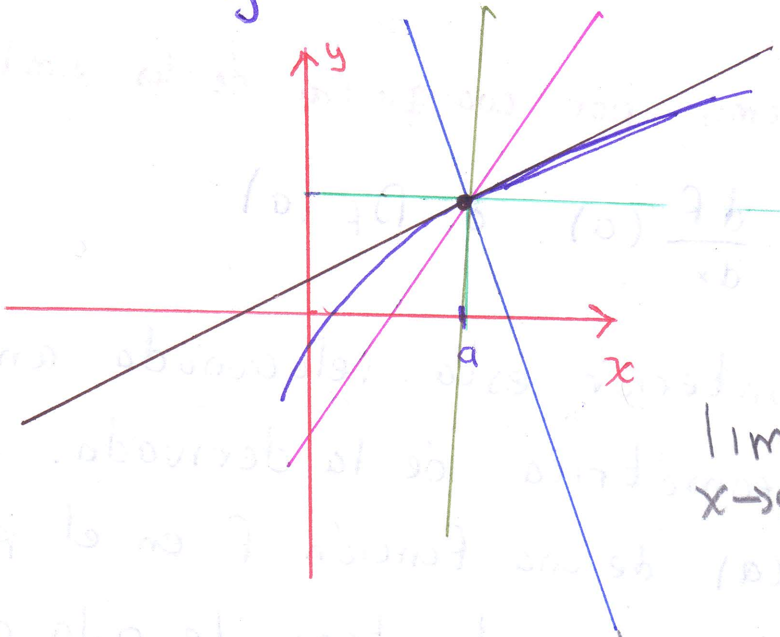
$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad o$$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

La definición nos dice en qué se distingue la recta tangente del resto de las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$. Nos dice cual es la propiedad que hace que la recta sea tangente a la curva. Consideremos todas las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$

Es una familia de rectas que se describe con la familia de ecuaciones

$$y = m(x-a) + f(a) \quad \text{con } m \in \mathbb{R}$$



Para cualquier ecuación

$$y = m(x-a) + f(a)$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) - (m(x-a) + f(a)) \right) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) - m(x-a) - f(a) \right) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) - f(a) - m(x-a) \right) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) - f(a) \right) - \lim_{x\to a} \left(m(x-a) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} m(x-a)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = m \lim_{x \to a} (x \to a)$$

$$\frac{\lim_{x \to a} (f(x) - f(a))}{\lim_{x \to a} x-a} = m$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))}{x-a} = m$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))}{x-a} = f'(a)$$

$$\therefore f'(a) = m$$

Sin embargo, la tangente se caracteriza por que su ecuacion no solamente cumple esta propiedad sino que cumple una propiedad más fuerte. No solo debe tender a cero la diferencia $f(x) - (m(x-a) + f(a))$, sino también debe tender a cero esta diferencia aun dividida entre $x-a$

$$\frac{f(x) - (m(x-a) + f(a))}{x-a} \to 0$$

Entonces la definición anterior nos dice para que f sea derivable en a, debe existir una recta con esa propiedad, que solamente tiene la recta tangente.

Derivabilidad significa la existencia de la recta tangente en este sentido

Cualquiera de las tres definiciones pueden utilizarse.