

Proposición

Si la función $f(x)$ es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$.

Demostración

Si f es derivable en $x=a$ entonces por la definición

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Veamos que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ o'

equivalente mente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) \cdot 1$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(a+h) - f(a) \cdot \frac{h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h =$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Con lo cual $f(x)$ es continua en $x=a$