Demostración

Vamos a considerar la definicion de derivada de la funcion compuesta (composición)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Hagamos el cambio $u = g(x)$ y sea

$K = g(x+h) - g(x)$ y tiende a 0

cuando $h \to 0$, es decir

$$\lim_{h\to 0} K = \lim_{h\to 0} (g(x+h) - g(x)) = \lim_{h\to 0} (g(x+h) - u)$$

$K = g(x+h) - u$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u+K) - f(u)}{h} = f'(u)$$

Supongamos que k es distinto de 0 para todos los valores pequeños de h

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{h} \cdot \frac{k}{k} = \lim_{h\to u} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Vamos a distinguir dos tipos de números de h

Para los cuales $g(x+h)-g(x) \neq 0$ y los del segundo tipo para los cuales $g(x+h)-g(x)=0$

Sea H_1 con h tal que $g(x+h)-g(x) \neq 0$

H_2 con h tal que $g(x+h)-g(x)=0$

para valores arbitrariamente pequeño de h

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0$$ para dichos valores.

esto es para h en H_2 y en consecuencia

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0$$

Más aun

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_2}} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = 0$$

pues h es del segundo tipo, de modo que

$g(x+h)-g(x)=0$, $g(x+h)=g(x)$ y por lo tanto $f(g(x+h))-f(g(x))=0$

Aquí se toma el límite cuando $h\to 0$ pero h del segundo tipo

Por otro lado, si tomamos el limite con h

del primer tipo, entonces se aplica el

argumento anterior podemos dividir y multiplicar

por $k = g(x+h) - g(x)$ y hallamos

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H_1}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H_1}} \frac{f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H_1}} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H_1}} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Como antes pero $g'(x) = 0$ Por ello el límite

es $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 0$ cuando $h \to 0$ ya sea h del

primer tipo o del segundo