Demostracion

Vamos a probar
$$\lim_{y \to f(c)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))}{y - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

Es suficiente ver que para toda sucesión $y_1, y_2, y_3 \ldots$ de puntos de J, distintos de $f(c)$ que tiende a $f(c)$ se tiene
$$\lim_{y_n \to f(c)} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

Sea pues $y_1, y_2, y_3, \ldots$ una sucesión de puntos de J diferentes de $f(c)$ que converge a $f(c)$

Sea la sucesión

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2),\ x_3 = f^{-1}(y_3), \dots$$

Los puntos de esta sucesion están en el intervalo (a, b) y son diferentes de c como f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b) f^{-1} es continua

Por tanto si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(c)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(c)) = c$$

Por otra parte, de la definicion de $x_n = f^{-1}(y_n)$ se tiene $f(x_n) = y_n$, de donde tenemos

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}$$

Por hipotesis

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

Por consiguiente, podemos hablar del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}} = \frac{1}{f'(c)}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

Con lo cual tenemos la prueba del Teorema