Fórmula de Leibniz

Sabemos que la derivada de un producto de dos funciones f y g en un punto x está dado por

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

En notación funcional esta fórmula se escribe como

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Calculemos la segunda derivada

$$(fg)'' = (f'g + fg')'$$
$$= (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg''$$
$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

Ahora calculemos la tercera derivada

$$(fg)^{3} = (f''g + 2f'g' + fg'')' = (f''g)' + 2(f'g')' + (fg'')'$$
$$= f'''g + f''g' + 2(f''g') + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$$
$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

Si continuamos con este proceso, es posible obtener la fórmula para la derivada de orden n

$$(fg)^n = f^n g + n f^{(n-1)} g^1 + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)} g^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(1)}{(n-1)!} f^1 g^{(n-1)} + f g^n$$

Los coeficientes de la expresion anterior son los coeficientes binomiales, por lo tanto la fórmula se puede escribir como una suma

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{k=n} c\binom{n}{k} f^{(n-k)} g^k$$

La expresion anterior es conocida como la fórmula de Leibniz