Tarea de
Cálculo Diferencial e Integral I
"Derivadas".

1. Usando la definición de derivada prueba que
   a. $f(x)=\frac{1}{x}$ entonces $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$, para $a\neq 0$
   b. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, entonces $f'(a)=-\frac{2}{a^3}$ para $a\neq 0$
   c. Si $g(x)=f(x)+c$, ($c\in\mathbb{R}$ constante) entonces $g'(x)=f'(x)$, (traza también un dibujo explicativo)
   d. Si $g(x)=cf(x)$, ($c\in\mathbb{R}$ constante), entonces $g'(x)=c\cdot f'(x)$
2. Supongamos que $f(a)=g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Define $h(x)=\begin{cases} f(x) & para\ \ x\leq a \\ g(x) & para\ x\geq a\end{cases}$ Demuestra que h es derivable en a.
3. ¿Qué puedes decir acerca de la derivada de la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\ es\ racional \\ 0\ si\ x\ es\ irracional\end{cases}$ en el punto $x=0$?
4.
   a. Demuestra que $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (No hay aquí nada de profundo)
   b. Demuestra que las derivadas constituyen una "propiedad local": Si $f(x)=g(x)$ para toda x de algún intervalo abierto que contiene a a, entonces $f'(a)=g'(a)$. (Esto significa que al calcular $f'(a)$, se puede prescindir de $f(x)$ para cualquier $x\neq a$ particular. Por supuesto, no se puede prescindir de $f(x)$ para todos los x a la vez).
   c. Supongamos que f es derivable en x. Demuestra que $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ SUGERENCIA: TENEMOS QUE RECORDAR UN VIEJO TRUCO ALGEBRAICO: UN NÚMERO NO SE ALTERA CUANDO SE LE SUMA Y RESTA A LA VEZ UNA MISMA CANTIDAD.
   d. De un modo más general demuestra que $f'(x)=\lim\limits_{h,k\to 0^+}\frac{f(x+k)-f(x-h)}{h+k}$
5. ¿Será cierto de que si $f+g$ es derivable en un intervalo I, entonces f y g son derivable?, Demuestra o da un contraejemplo.
6.
   a. Si $f(x)$ es derivable en $x=a$, demuestra que $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$
   b. Si $f(x)$ es derivable en $x=a$, demuestra que $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}=f(a)+af'(a)$
7. Halla la derivada de las siguientes funciones

$f(x)=(x^2-3x)+3(x^2+2x-1)$	$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$	$f(x)=\frac{1-x^3}{\pi}$	$f(v)=\dfrac{v^2-v+1}{a^2-3}$	$f(x)=\dfrac{ax+bx^2}{am+bm^2}$
$f(m)=\dfrac{ax+bx^2}{am+bm^2}$	$f(x)=\dfrac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$f(x)=x^{9.9}+x^{10.1}$	$f(t)=\left(t^3-\dfrac{1}{t}+3\right)^4$	$f(x)=(1+\sqrt{x})/(1+\sqrt{2x})$
$f(v)=\dfrac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$	$f(x)=a\sqrt{x}-\dfrac{b}{\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}$	$f(x)=\sqrt{\dfrac{a}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{a}}$	$f(x)=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

$f(t) = 2t\cos t$	$f(y) = y^3 - y^2\cos y + 2y\,sen\,y + 2\cos y$	$f(x) = \sec x \tan x$	$f(y) = \dfrac{\cot y}{1 - sen\,y}$	$g(z) = \dfrac{z^3 + \cos z}{2z - sen\,z}$

8. Calcula la derivada por regla de la cadena

$h(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$	$f(x) = 4\cos 3x - 3\,sen\,4x$	$g(x) = \sec^2 x$	$m(x) = (\sec(x^2) \cdot \tan^2(x^3))$	$e(t) = sen^2(3t^2 - 1)$
$j(x) = (2\,sen\,x - 3\cos x^3)^4$	$w(t) = 4\cos(sen\,3t)$	$f(x) = sen^2(\cos 2x)$	$f(x) = \tan^2 x^2$	$q(e) = (e + \csc(e^3 + 3))^{-3}$

9. Encuentra la derivada usando

$h(z) = \arctan(z^2)$	$f(x) = (\arctan(x))^2$	$g(x) = \arctan(\tan x))$	$m(x) = \tan(\arctan x)$	$e(t) = \arctan(\frac{1}{2}\tan\frac{t}{2})$
$j(x) = \dfrac{arcsen(x)}{\arccos x}$	$w(t) = \arctan t + \operatorname{arccot} t$	$f(x) = x\log x$	$f(x) = \log(\cos x)$	$q(m) = \log(\log(\log(m)))$

10. Recordemos que una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x y es impar $f(-x) = -f(x)$. Demuestra la derivada de una función par es impar, mientras que la derivada de una función impar es par.
11. Demuestra que si h es derivable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, g es derivable sobre un intervalo que contiene a $h(\mathfrak{J})$ y f es diferenciable sobre un intervalo que contiene a $(g \circ h)(\mathfrak{J})$, entonces
$$\frac{d}{dx}\Big(\big(f \circ (g \circ h)\big)(x)\Big) = \frac{d}{dx}f\big(g\big(h(x)\big) \cdot \frac{d}{dx}\big(g\big(h(x)\big) \cdot \frac{d}{dx}\big(h(x)\big)$$
Son esta regla y su expresión las que sugieren el nombre de "regla de la cadena"; el operador $\frac{d}{dx}$ progresa a lo largo de la cadena.
12.
    a. Halla una fórmula para la segunda derivada de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
    b. Halla la tercera derivada de $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
    c. Halla la segunda derivada de $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$
13. Sean f y g funciones cuyas respectivas primeras y segunda derivada existen dentro del intervalo I. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es verdadera? Justifica tu respuesta
    a. $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$
    b. $fg'' + f''g = (fg)''$
14. Prueba que si $\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)\big)$ y $\frac{d^n}{dx^n}\big(g(x)\big)$ existen sobre un intervalo I, entonces existen $\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x) + g(x)\big)$ y que $\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) + \frac{d^n g}{dx^n}(x)$
15. Deduce las formulas siguientes
    a. $(sen^n(x) \cdot \cos(nx))' = n \cdot sen^{n-1}(x) \cdot \cos\big((n+1)x\big)$
    b. $\big(sen^n(x) \cdot sen\,(nx)\big)' = n \cdot sen^{n-1}(x) \cdot sen\big((n+1)x\big)$
    c. $(\cos^n(x) \cdot sen\,(nx))' = n \cdot \cos^{n-1}(x) \cdot \cos\big(n + 1(x)\big)$
    d. $(\cos^n(x) \cdot \cos(nx))' = -n \cdot \cos^{n-1}(x) \cdot sen((n+1)x)$