



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

COMPLETEZ GEODÉSICA DE VARIEDADES LORENTZIANAS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
ANA KARLA GARCÍA PÉREZ

DIRECTOR DE LA TESINA: DR OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, D. F. a 26 de junio de 2014.

Índice

1. Preliminares	2
2. Completez de variedades lorentzianas	6
3. Construcción de métricas incompletas	11
4. Comentarios finales	17

Prefacio

En el estudio de la relatividad general, es frecuente que nos encontremos con singularidades en el espacio-tiempo, las cuales se describen como una ruptura en la estructura geométrica del espacio y del tiempo. Por lo regular se asocian las singularidades con magnitudes físicas no acotadas y con geodésicas que terminan en un valor finito de su parámetro afín. En nuestro caso decimos que nuestro espacio-tiempo es incompleto. De hecho, en algunas circunstancias las singularidades son inevitables, como por ejemplo los hoyos negros. Es por esto que resulta de gran importancia comprender a los espacios-tiempo completos e incompletos.

Una parte de este trabajo se basa en el artículo de Alfonso Romero y Miguel Sánchez, llamado *On Completeness of Compact Lorentzian Manifolds* [RS]. Guiándonos en este artículo, recopilaremos algunos resultados sobre la completez de variedades lorentzianas, y los compararemos con las variedades riemannianas. El objetivo del trabajo es construir ejemplos de variedades lorentzianas completas e incompletas, dándonos contraejemplos de conjeturas que parecerían razonables y una mejor intuición sobre estos espacios.

1. Preliminares

Daremos algunos conceptos y notaciones que necesitaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. Una **variedad semi-riemanniana** de dimensión n es una variedad diferenciable (M, g) de dimensión n dotada de un tensor métrico g con índice constante. Una **variedad lorentziana** de dimensión n es una variedad semi-riemanniana de dimensión $n \geq 2$ y con índice 1.

El ejemplo más simple de variedad semi-riemanniana es el espacio semi-euclidiano con índice ν denotado \mathbb{R}_ν^n , dado por el espacio vectorial de dimensión n dotado con el tensor métrico definido como sigue: Para cualquier punto $p \in \mathbb{R}_\nu^n$, y cualesquiera vectores tangentes $v, w \in T_p \mathbb{R}_\nu^n$ escritos en términos de sus coordenadas naturales $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$ y $w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_i$, tenemos

$$g_p(v, w) = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^n v^i w^i.$$

De particular importancia es el espacio \mathbb{R}_1^n , que también denotaremos por \mathbb{L}^n y llamaremos el **espacio de Minkowski**.

Observación 1.2. Aunque los conceptos y resultados que usaremos son válidos en el contexto de las variedades semi-riemannianas, todos nuestros ejemplos serán variedades lorentzianas.

Definición 1.3. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y $p \in M$. El **carácter causal** de un vector tangente $v \in T_p M$, es:

- tipo tiempo si $g_p(v, v) < 0$,
- tipo luz o nulo si $g_p(v, v) = 0$,
- tipo espacio si $g_p(v, v) > 0$ ó $v = 0$.

De manera similar podemos definir el carácter causal de una geodésica γ ; diremos que γ es tipo tiempo, (luz o espacio, respectivamente) si el carácter causal de (todos) sus vectores velocidad es tipo tiempo (luz o espacio, respectivamente).

Definición 1.4. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Una geodésica inextensible en M es **completa** si su dominio es todo \mathbb{R} , de lo contrario diremos que es **incompleta**.

Diremos que la métrica g es **completa tipo tiempo (luz o espacio, respectivamente)** si todas sus geodésicas tipo tiempo (luz o espacio, respectivamente) son completas.

Enunciaremos ahora un resultado que necesitaremos más adelante.

Lema 1.5. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ una geodésica en M con $b < \infty$. Si los vectores velocidad de γ están contenidos en un subconjunto compacto de TM , es decir, si $\{(\gamma(t), \gamma'(t)) \mid t \in [0, b)\} \subset C \subset TM$ con C compacto, entonces γ es extensible más allá de b .

Demostración. Recordemos que el campo vectorial geodésico G en TM está dado como sigue: Para cada $X_p \in TM$ se tiene que $G(X_p)$ es la velocidad inicial de la curva $t \mapsto (\exp(tX_p))'$, donde \exp es la transformación exponencial para g . Dado que γ es una geodésica entonces tenemos que $\rho : [0, b) \rightarrow TM$ dada por $\rho(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ es una curva integral del campo vectorial G en TM , y como $\{(\gamma(t), \gamma'(t)) \mid t \in [0, b)\} \subset C \subset TM$ con C compacto, entonces se tiene una sucesión $\{s_i\}$ en $[0, b)$ que converge a b tal que $\rho(s_i)$ converge en C . Sea U una vecindad abierta del límite de la sucesión $\{\rho(s_i)\}$ tal que está definido el flujo de G en $U \times (-\delta, \delta)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b - \delta < s_n$ y $\rho(s_n) \in U$, por lo que tenemos la curva integral en $\rho(s_n)$ definida en $[0, \delta)$ y gracias a la unicidad de las curvas integrales podemos extender ρ en $[0, b + \epsilon)$ donde $\epsilon = s_n + \delta - b$, esto nos da la extensión de γ en $[0, b + \epsilon)$ de manera que siga siendo una geodésica. \square

La noción de completez en variedades semi-riemannianas es más sutil que en el caso riemanniano, pues no se tiene una distancia canónica asociada a la métrica y por tanto no se tiene una generalización directa del teorema de Hopf-Rinow, que como sabemos afirma la equivalencia de la completez métrica y la completez geodésica. En consecuencia, la completez para variedades semi-riemannianas quiere decir sólo la completez de las geodésicas. Como ejemplos de variedades semi-riemannianas completas tenemos al espacio semi-euclidiano \mathbb{R}_v^n (cuyas geodésicas son líneas rectas) y a la pseudoesfera de radio $r > 0$, $S_v^n(r) = \{p \in \mathbb{R}_v^{n+1} \mid g(p, p) = r^2\}$ con $n \geq 2$ (cuyas geodésicas son ramas de hipérbolas, líneas rectas y elipses).

Es fácil ver que cualquier variedad riemanniana compacta es completa, ya que por ser compacta tenemos que la variedad es completa como

espacio métrico y por el teorema de Hopf-Rinow se tiene que la variedad es geodésicamente completa. En cambio, existen ejemplos de variedades semi-riemannianas compactas que pueden ser incompletas, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6 (Toro de Clifton-Pohl). Sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la métrica $ds^2 = 2dxdy/(x^2 + y^2)$. Podemos notar que las multiplicaciones por un escalar distinto de cero son isometrías en M . Tomamos la isometría $\mu(x, y) = (2x, 2y)$ y consideramos al grupo generado por μ , $\Gamma = \{\mu^n\}$, que actúa de manera propiamente discontinua en M ; de modo que se le puede dar la estructura de superficie lorentziana al espacio orbital $T = M/\Gamma$. T va a resultar ser un toro, que en particular es compacto. Pero T no es completo; de hecho, M no es completa: Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son

$$x'' = \frac{2x}{x^2 + y^2}(x')^2 \quad y \quad y'' = \frac{2y}{x^2 + y^2}(y')^2,$$

de modo que la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{1-t}, 0)$ es una geodésica inextensible definida solamente para $\infty < t < 1$.

Otra propiedad que necesitaremos adelante es la siguiente:

Lema 1.7 (Lema de Conservación). *Sea K un campo vectorial de Killing sobre una variedad semi-riemanniana (M, g) , y sea γ una geodésica en M , entonces $g(K, \gamma')$ es constante.*

Demostración. Recordemos que el campo de Killing K satisface

$$g(D_X K, Y) + g(D_Y K, X) = 0$$

para cualesquiera campos vectoriales X, Y en M ; aquí D es la conexión de M . Ahora como γ es una geodésica se tiene

$$\frac{d}{dt}g(K, \gamma') = g(K', \gamma') = g(D_{\gamma'} K, \gamma') = 0;$$

por lo tanto, $g(K, \gamma')$ es constante. \square

Uno de los métodos que usaremos para construir ejemplos de variedades lorentzianas incompletas será el de modificar una métrica multiplicándola por un factor conforme; por esto veremos las propiedades básicas de las métricas conformes:

Definición 1.8. *Dos métricas g y h en una variedad semi-riemanniana M son conformes si existe una función diferenciable $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g = \lambda h$, con $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$.*

Una **pregeodésica** es una curva que se convierte en geodésica al aplicarle una reparametrización adecuada. Vamos a ver que al realizar un cambio conforme a una métrica semi-riemanniana las geodésicas tipo luz serán pregeodésicas del mismo tipo.

Lema 1.9. *Sea M una variedad semi-riemanniana. Entonces el conjunto de las pregeodésicas tipo luz es un invariante conforme.*

Demostración. Sean g y h dos métricas conformes, de modo que existe una función diferenciable que no se anula $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h = \lambda g$. Podemos asumir que $\lambda > 0$ y expresar esta función como $\lambda = e^{2u}$ con u una función diferenciable en M .

Utilizando la fórmula de Koszul podemos obtener la siguiente relación entre las conexiones de Levi-Civita \hat{D} y \hat{D} de g y h respectivamente. Dados dos campos vectoriales X y Y en M , se tiene:

$$\hat{D}_X Y = D_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\text{grad } u.$$

Consecuentemente, vamos a tener una relación entre las derivadas covariantes, por lo que dado una curva $\gamma : I \rightarrow M$ tendremos:

$$\frac{\hat{d}\gamma'}{dt} = \frac{d\gamma'}{dt} + 2\gamma'(u)\gamma' - g(\gamma', \gamma')\text{grad } u.$$

En el caso particular en que γ es una geodésica tipo luz para la métrica g , se tiene:

$$\frac{\hat{d}\gamma'}{dt} = f(\gamma)\gamma' \quad \text{con } f(\gamma) = 2\frac{d(u \circ \gamma)}{dt},$$

lo que quiere decir que los vectores γ'' y γ' son colineales y por tanto γ es una pregeodésica para h . La parametrización de esta curva como geodésica se puede escribir como $\hat{\gamma} : J \rightarrow M$ con $\hat{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ y

$$s'(t) = ce^{\int_0^t f(\sigma)d\sigma} = ce^{2u(\gamma(t))} \quad \text{con } c \text{ constante.}$$

□

2. Completez de variedades lorentzianas

Es natural preguntarse si existe alguna dependencia entre los tres tipos causales de completez; es decir, si la completez de cierto tipo implica la completez de otro tipo. A continuación mostraremos algunos ejemplos que dan respuesta a esta pregunta.

Ejemplo 2.1. Veamos primero un ejemplo de una variedad lorentziana que es completa tipo tiempo y tipo luz, pero no es completa tipo espacio (ver [Ku]). Sea $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ con la métrica

$$ds^2 = dx^2 - \frac{1}{x^2} dt^2.$$

Usando las ecuaciones de las geodésicas obtenemos el siguiente hecho: Para cualquier geodésica $\gamma(s) = (x(s), t(s))$, con s midiendo la longitud afín, se tiene

$$\frac{dt}{ds} = cx^2, \quad s - s_0 = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\epsilon + (cx)^2}} dx$$

con c una constante y $\epsilon = -1, 0, 1$ para las geodésicas tipo tiempo, luz, o espacio respectivamente. En el caso de que la geodésica sea tipo tiempo o luz, $\epsilon \leq 0$ y entonces

$$s - s_0 = \int \frac{1}{\sqrt{\epsilon + c^2 x^2}} dx \geq \int \frac{1}{cx} dx = \frac{1}{c} \log x,$$

de modo que cuando x tiende a infinito, s también y la geodésica está definida para todo $s > 0$. Por el otro lado, vemos que las geodésicas tipo luz son de la forma $x^2/2 = t + C$, es decir, son parábolas que tocan al eje t , de modo que las geodésicas tipo tiempo siempre quedan dentro de la región $x > 0$ y por tanto son completas. Finalmente, del análisis de estas integrales tenemos que las geodésicas tipo espacio tienen longitud finita cuando llegan a $x = 0$ y por tanto son incompletas.

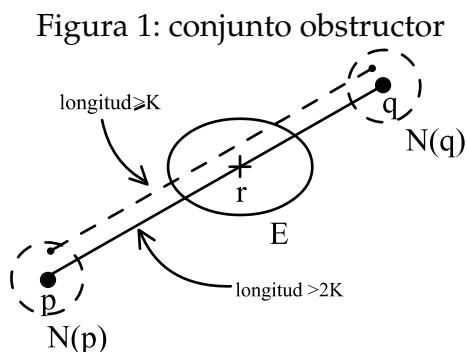
Observación 2.2. Ahora es fácil obtener un ejemplo de variedad lorentziana que es completa tipo luz y tipo espacio, pero no completa tipo tiempo [Ge]. La idea es sencilla: Invertir la métrica que se tenía en el ejemplo anterior. Se tiene $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ con la métrica

$$g = -dx^2 + \frac{1}{x^2} dt^2.$$

Ahora queremos construir una variedad completa tipo espacio y tipo tiempo, pero no completa tipo luz. Para esto nos basaremos en [B] donde se demuestra el siguiente resultado, que será utilizado para la construcción del ejemplo.

Aquí vamos a denotar $(x_1, y_1) \ll (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ y existe una curva tipo tiempo que va desde (x_1, y_1) hasta (x_2, y_2) .

Lema 2.3. Sea p y q puntos de \mathbb{R}^2 con $p \ll q$. Sea $b > 0$ y $K > 0$ dados. Sea r cualquier punto interior del segmento euclidiano que une a p con q . Entonces existe una elipse E , que llamaremos conjunto obstructor, centrada en r con semieje mayor más pequeño que b y una función $H(x, y)$, que llamaremos función obstructora, que es idéntica a la unidad excepto en E tal que la única geodésica de p a q para la métrica $ds^2 = -H(x, y)dxdy$ es la línea euclidiana de p a q y tiene longitud mayor que $2K$. También existen vecindades $N(p)$ y $N(q)$, de p y q respectivamente, tal que cualquier geodésica cuyos extremos están uno en $N(p)$ y el otro en $N(q)$ tiene longitud por lo menos K . (Ver figura 1).

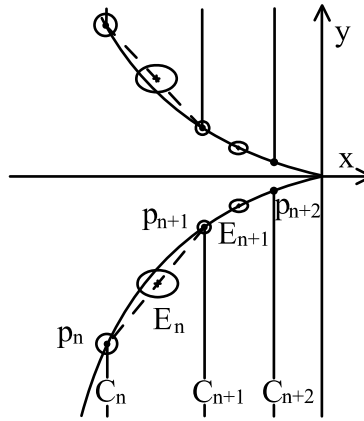


Continuando con la construcción del ejemplo, consideremos el semiplano izquierdo $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$. La idea es construir una métrica en M de la forma $ds^2 = -H(x, y)dxdy$ tal que la única geodésica incompleta sea la geodésica tipo luz $\alpha(t) = (t, 0)$ con $t < 0$. La función H va a satisfacer $H(x, y) = H(x, -y)$, es decir, será simétrica con respecto al eje $y = 0$, de modo que bastará definirla en el tercer cuadrante del plano.

Sean los puntos $p_n = (-\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{4^n})$ donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y $r_n = (p_n + p_{n+1})/2$ los puntos medios de p_n y p_{n+1} . Gracias al lema, para cada par p_n, p_{n+1} construimos un conjunto obstructor $E_n \subset B(r_n, \frac{1}{16^n})$ (el disco euclidiano) centrado en r_n tal que la geodésica de p_n a p_{n+1} tiene longitud por lo menos

2, con $H_n(x, y)$ la función obstructora correspondiente a E_n . Sean δ_n y δ'_n dos números positivos tal que cualquier geodésica con puntos extremos en $B(p_n, \delta_n)$ y el otro en $B(p_{n+1}, \delta'_n)$ tiene longitud por lo menos la unidad. Sea $\epsilon_n = \min(\delta_n, \delta'_{n-1}, \frac{1}{16^n})$ y $\epsilon_1 = \min(\delta_1, \frac{1}{16})$. Definimos los segmentos de líneas $L_n = \{(x, y) \mid x = -\frac{1}{2^n}, y \leq -\frac{1}{4^n}\}$. Luego sea C_n el conjunto cerrado formado por la unión de L_n y el disco euclidiano cerrado de radio $\frac{\delta_n}{2}$ alrededor de p_n , el cual es el punto extremo de la línea L_n y se encuentra sobre la curva $y = -x^2$. La figura 2 muestra el proceso.

Figura 2: construcción de la métrica



Construimos factores conformes $\bar{H}_n(x, y)$ tales que los puntos de la frontera de C_n se conviertan en puntos al infinito usando $ds^2 = -\bar{H}_n(x, y)dx dy$. La función $\bar{H}_n(x, y)$ es idénticamente uno fuera de la vecindad abierta $B(C_n, \frac{\epsilon_n}{4})$. Usamos el disco de la parte superior de C_n para asegurar que cualquier geodésica tipo tiempo que comienza hacia un punto de L_n abajo del disco de C_n debe quedar atrapada por el disco y forzada a ir conformemente al infinito en la frontera de C_n .

Finalmente, la función que nos sirve para este ejemplo es

$$H(x, y) = \prod H_n(x, y)\bar{H}_n(x, y)$$

y la métrica nos queda $ds^2 = -H(x, y)dx dy$. Este producto está bien definido y es C^∞ . Se tendrá que la geodésica tipo luz $\alpha(t) = (t, 0)$ con $t < 0$ es incompleta pues se tiene una vecindad abierta de la curva en donde la métrica es solamente $ds^2 = -dx dy$.

Observación 2.4. Los ejemplos anteriores muestran que en el caso de variedades lorentzianas se tiene una independencia entre los tres tipos de completez. Hay que notar que las variedades de estos ejemplos son no compactas, de modo que sería interesante buscar ejemplos de variedades lorentzianas compactas que nos muestren la independencia de los tres tipos de completez.

Métricas conformes

Todos los ejemplos anteriores fueron construidos multiplicando la métrica de la variedad por un factor conforme, por lo que es natural preguntarse si al hacer cambios conformes a la métrica se puede ganar (o perder) la completez.

En el caso riemanniano compacto todas las métricas son completas, como vimos anteriormente. En el caso riemanniano no-compacto, Nomizu y Ozeki en [NO] probaron que cualquier métrica riemanniana es conforme a una completa. Por otro lado, se puede probar que cualquier métrica riemanniana completa en una variedad no-compacta es conforme a una incompleta: La idea de la demostración es tomar una curva adecuada en la variedad y buscar el factor conforme de tal manera que haga que esta curva tenga longitud finita. Así, la pregunta en el caso riemanniano está totalmente contestada.

Para las variedades semi-riemannianas compactas, particularmente para las variedades lorentzianas compactas, sólo tenemos que la completez tipo luz es un invariante conforme.

Proposición 2.5. Sean g y h dos métricas conformes en una variedad semi-riemanniana compacta M , y sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodésica completa tipo luz para la métrica g , entonces existe una reparametrización de γ tal que sigue siendo una geodésica completa tipo luz para la métrica h .

Demostración. Gracias al lema 1.9 la geodésica $\gamma(t)$ tipo luz tiene una reparametrización $\hat{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ tal que sigue siendo una geodésica tipo luz para la métrica h , sólo falta ver que esta reparametrización está definida para todo valor de \mathbb{R} .

Sabemos que existe una función diferenciable que no se anula $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h = \lambda g$. Podemos asumir que $\lambda > 0$ y expresar esta función como $\lambda = e^{2u}$ con u una función diferenciable en M . Al ser M compacta vamos a

tener que $\inf(\lambda) > 0$.

Como observamos en la demostración del lema 1.9 la reparametrización de γ cumple que $s'(t) = ce^{2u(\gamma(t))}$, por lo que $\inf |ds/dt| > 0$ ya que $\inf(\lambda) > 0$, entonces tendremos que $s(t)$ debe cubrir a todo \mathbb{R} , es decir, $\hat{\gamma}$ es una geodésica completa tipo luz para la métrica h . \square

Pero el problema sigue abierto tanto para la completez tipo tiempo como para la completez tipo espacio; es decir, no es clara la relación entre estos tipos de completez y los cambios conformes de las métricas.

Completez de variedades homogéneas

Recordemos que una variedad homogénea M cumple que dados cualesquiera dos puntos $p, q \in M$, existe una isometría ϕ en M tal que $\phi(p) = q$. Es natural pensar que se puede obtener la completez dada esta propiedad.

En el caso riemanniano se tiene que una variedad homogénea es completa como se muestra en [O], observación 9.37. Pero para el caso lorentziano se pueden construir variedades homogéneas que son incompletas, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6. Consideramos \mathbb{L}^2 el espacio de Minkowski con coordenadas nulas $\{u, v\}$ de tal modo que la métrica g_0 de \mathbb{L}^2 es $g_0 = du \otimes dv + dv \otimes du$, o equivalentemente la métrica es $ds^2 = 2dudv$. Sea $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^2$; entonces se tiene que M es una variedad homogénea incompleta: Primero observemos que para cada $(a, b) \in M$ la isometría $(u, v) \mapsto (\frac{u}{a}, av)$ manda al punto (a, b) a $(1, ab)$; luego la isometría $(u, v) \mapsto (u, v - ab)$ lo manda a $(1, 0)$, de modo que M es homogénea. Por otro lado, M es incompleta ya que se tiene la geodésica nula $\alpha(t) = (t, 0)$ con dominio máximo \mathbb{R}^+ .

Observemos que la variedad del ejemplo anterior no es compacta. Marsden probó en [M] que cualquier variedad semi-riemanniana compacta y homogénea es completa. La idea de la demostración es construir una partición del haz tangente en subconjuntos compactos que son invariantes bajo el flujo geodésico y luego usar el lema 1.5 para concluir que la variedad es completa.

3. Construcción de métricas incompletas

Vamos a construir una amplia familia de variedades lorentzianas con métricas incompletas.

Definición 3.1. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Decimos que una geodésica no constante $\gamma : I \rightarrow M$ es **cerrada** si existe $\lambda > 0$ y dos puntos $s_1, s_2 \in I$ distintos, tal que $\gamma'(s_1) = \lambda\gamma'(s_2)$.

Si γ es una geodésica pero no es de tipo luz, entonces la norma de γ' es constante y diferente de cero, lo que implica $\lambda = 1$; en este caso, la geodésica cerrada se vuelve completa, pues le podemos dar el número de vueltas que queramos con la misma velocidad. Si dejamos que nuestra geodésica sea de tipo luz entonces el valor de λ puede ser distinto de uno, entonces pasa lo siguiente:

Proposición 3.2. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica cerrada tipo luz. Si $\lambda \neq 1$ entonces γ es incompleta.

Demostración. Supongamos primero que $\lambda > 1$ y sean $s_1, s_2 \in I$ distintos tal que $\gamma'(s_1) = \lambda\gamma'(s_2)$. Llamamos $\gamma_1 = \gamma|_{[s_1, s_2]}$; la idea es tratar de extender a γ tomando reparametrizaciones del lazo γ_1 .

Primero vamos a extender γ_1 hasta el punto $s_3 > s_2$, que cumple con

$$\gamma'(s_3) = \lambda\gamma'(s_2) = \lambda^2\gamma'(s_1).$$

Nos sirve una reparametrización $f : [s_2, s_3] \rightarrow [s_1, s_2]$ de la forma $f(t) = \lambda t + c$ tal que $f(s_2) = s_1$ y $f(s_3) = s_2$, de donde podemos calcular que $f(t) = \lambda t + s_1 - \lambda s_2$ y que $s_3 = s_2 + \frac{s_2 - s_1}{\lambda}$. Nos queda el lazo

$$\gamma_2 : \left[s_2, s_2 + \frac{s_2 - s_1}{\lambda} \right] \rightarrow M$$

que es la extensión de γ_1 . Ahora podemos extender a γ_2 de manera análoga, y nos quedará

$$\gamma_3 : \left[s_2 + \frac{s_2 - s_1}{\lambda}, s_2 + \frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \frac{s_2 - s_1}{\lambda^2} \right] \rightarrow M,$$

que es la reparametrización de γ_2 . así podemos generalizar para ver en donde está definida la reparametrización γ_n . Entonces por el lado derecho

sólo la podemos extender γ al intervalo

$$\left[s_1, s_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_2 - s_1}{\lambda^i} \right],$$

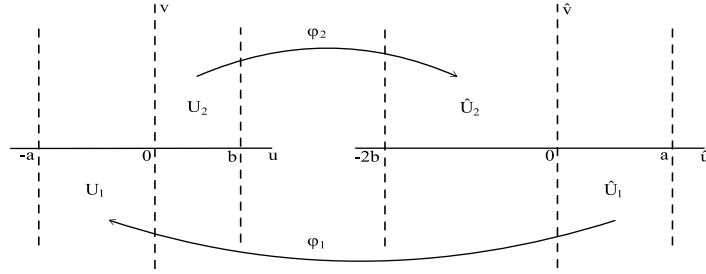
y como $\frac{1}{\lambda} < 1$, la serie converge, por lo que la curva γ es incompleta. Si $\lambda < 1$, se hace un estudio parecido pero del lado izquierdo (negativo) y obtendremos que será incompleta. \square

Ahora vamos a construir una variedad lorentziana plana con una geodésica cerrada incompleta.

Sea \mathbb{L}^2 el espacio de Minkowski. Consideramos una copia $\hat{\mathbb{L}}^2$ de \mathbb{L}^2 y tomamos las coordenadas nulas usuales (u, v) , (\hat{u}, \hat{v}) en \mathbb{L}^2 y $\hat{\mathbb{L}}^2$ respectivamente, de modo que la métrica g_0 de \mathbb{L}^2 es $g_0 = du \otimes dv + dv \otimes du$; y análogamente para $\hat{\mathbb{L}}^2$. Sean $a, b > 0$, y consideramos los siguientes subconjuntos abiertos:

$$\begin{aligned} U &= \{(u, v) \in \mathbb{L}^2 \mid -a < u < b\} & \hat{U} &= \{(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{\mathbb{L}}^2 \mid -2b < \hat{u} < a\} \\ U_1 &= \{(u_1, v_1) \in \mathbb{L}^2 \mid -a < u_1 < 0\} & \hat{U}_1 &= \{(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \in \hat{\mathbb{L}}^2 \mid 0 < \hat{u}_1 < a\} \\ U_2 &= \{(u_2, v_2) \in \mathbb{L}^2 \mid 0 < u_2 < b\} & \hat{U}_2 &= \{(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \in \hat{\mathbb{L}}^2 \mid -2b < \hat{u}_2 < 0\}. \end{aligned}$$

Figura 3: construcción de un cilindro incompleto



También consideramos las isometrías

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: \hat{U}_1 \rightarrow U_1, & \varphi_1(\hat{u}_1, \hat{v}_1) &= (\hat{u}_1 - a, \hat{v}_1) \\ \text{y } \varphi_2 &: U_2 \rightarrow \hat{U}_2, & \varphi_2(u_2, v_2) &= (2u_2 - 2b, \frac{1}{2}v_2). \end{aligned}$$

Vamos a identificar a cada punto de la unión disjunta de U con \hat{U} con su imagen bajo φ_1 ó φ_2 , entonces la variedad cociente resulta ser un cilindro, y de manera natural se tiene una métrica lorentziana inducida.

Ahora consideremos la geodésica $\alpha(t) = (t, 0)$ definida en U para $t \in (-a, b)$, que se proyecta en la geodésica $\bar{\alpha}$; afirmamos que $\bar{\alpha}$ es cerrada e incompleta. Para ver que es cerrada vamos a extender la geodésica hasta llegar de nuevo al valor de $(0, 0)$ en U .

Primero extendemos en \hat{U} y nos queda: $\bar{\alpha}(t) = [2t - 2b, 0]$, con $t \in [b, b + \frac{a}{2})$. Luego extendemos en U y nos queda: $\bar{\alpha}(t) = [2t - 2b - a, 0]$, con $t \in [b + \frac{a}{2}, \frac{3}{2}b + \frac{a}{2})$.

Podemos concluir que $\bar{\alpha}'(b + \frac{a}{2}) = 2\bar{\alpha}'(0)$, es decir, esta curva es una geodésica cerrada. Por la proposición 3.2 es incompleta ya que en este caso $\lambda = 2$; su dominio máximo es

$$\left(-\infty, b + \frac{a}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b + \frac{a}{2}}{2^i} \right) = (-\infty, a + 2b).$$

Otra manera de construir cilindros incompletos es la siguiente: Como en el ejemplo 2.6, consideramos \mathbb{L}^2 con sus coordenadas nulas $\{u, v\}$ y su subvariedad lorentziana $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. La acción de \mathbb{Z} generada por la transformación $S(u, v) = (eu, e^{-1}v)$, nos da como variedad cociente un cilindro C con su métrica inducida, que seguiremos llamando g_0 , el cual es localmente isométrico al construido anteriormente. Notemos que el eje u puede ser parametrizado como una geodésica incompleta tipo luz, que se proyecta a una geodésica cerrada incompleta en C .

Ahora, vamos a construir una familia de variedades compactas incompletas a partir del cilindro (C, g_0) . Primero consideremos el difeomorfismo

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad \phi(x, y) = (e^y, xe^{-y}).$$

La métrica $g^* = \phi^* g_0$ en \mathbb{R}^2 escrita en coordenadas locales se ve así:

$$g_{(x,y)}^* = dx \otimes dy + dy \otimes dx - 2x(dy)^2;$$

es decir, la matriz de la métrica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2x \end{pmatrix}$$

en cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La acción generada por la isometría $T = \phi^{-1} \circ S \circ \phi$, donde $T^n(x, y) = \phi^{-1} \circ S^n \circ \phi(x, y) = (x, y + n)$, es propiamente discontinua, por lo que obtenemos un cilindro isométrico a (C, g_0) . Gracias a la

isometría vamos a tener que el eje $x = 0$ proyectado al cilindro puede ser reparametrizado como una geodésica cerrada tipo luz incompleta. Vamos a ver si también es incompleta tipo tiempo y tipo espacio, para esto calcularemos las ecuaciones de las geodésicas.

Se tiene que los símbolos de Christoffel son $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = -1, \Gamma_{22}^1 = 2x$ y $\Gamma_{22}^2 = 1$. Entonces las ecuaciones de las geodésicas para $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ quedan:

$$x'' - 2x'y' + 2xy'^2 = 0 \quad \text{y} \quad y'' + y'^2 = 0.$$

Gracias a la segunda ecuación vamos a obtener que $y(t) = \ln(|t + c|)$, con c constante, la cual no está definida para todo valor de \mathbb{R} , por lo que (\mathbb{R}^2, g^*) es incompleta tipo tiempo y tipo espacio también.

A partir de esto queremos hacerle cambios a la métrica de tal manera que siga siendo incompleta y que la podamos inducir a una variedad compacta.

Para cualquier función diferenciable τ en \mathbb{R} , consideramos la métrica h^τ en \mathbb{R}^2 dada por:

$$h_{(x,y)}^\tau = dx \otimes dy + dy \otimes dx - 2\tau(x)dy^2.$$

Se tienen las siguientes propiedades:

1. Si $\tau(0) = 0$ pero $\tau'(0) \neq 0$ entonces h^τ es incompleta. Esto pasa pues los símbolos de Christoffel en cualquier punto nos quedan $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = -\tau', \Gamma_{22}^1 = 2\tau\tau'$ y $\Gamma_{22}^2 = \tau'$, por lo que las ecuaciones de las geodésicas nos quedan

$$x'' - 2\tau'x'y' + 2\tau\tau'y'^2 = 0 \quad \text{y} \quad y'' + \tau'y'^2 = 0.$$

Así, existe una geodésica con $x = 0$ y $y(t) = \ln(|\tau'(0)t + c|)/\tau'(0)$, pues $\tau'(0) \neq 0$ y c es cualquier constante.

2. Si τ es periódica entonces h^τ es inducible en un toro, tomando la identificación adecuada en \mathbb{R}^2 .

Finalmente, podemos considerar la siguiente familia de métricas en \mathbb{R}^2 , que generaliza a las métricas h^τ :

$$g_{(x,y)} = \alpha(x)dx^2 + \beta(x)[dx \otimes dy + dy \otimes dx] - \delta(x)dy^2$$

donde las funciones diferenciables α, β y δ en \mathbb{R} , satisfacen:

- (i) $\alpha\delta + \beta^2 > 0$, esto quiere decir que g nos quedará una métrica lorentziana.
- (ii) α, β , y δ son periódicas, con periodos conmensurables de tal manera que podamos inducir naturalmente la métrica g en un toro.

Notemos que $\partial/\partial y$ es un campo de Killing; de hecho, su flujo local $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dado por $F(t_0, (x, y)) = (x, y + t_0)$ y es una isometría que no modifica la parte de x .

Gracias a esta observación, y dependiendo de cómo sea la función δ , tendremos algunas propiedades de esta familia de ejemplos:

- Si $\delta \not\equiv 0$, pero δ se anula por lo menos en un punto entonces g es incompleta tipo luz.

Haciendo un análisis parecido al caso en el que teníamos a la métrica h^τ , vamos a observar que la curva $x = a$, donde $a \in \mathbb{R}$ es tal que $\delta(a) = 0$, es una geodésica tipo luz incompleta pues se tiene que $\Gamma_{22}^1 = \frac{\delta\delta'}{2(\alpha\delta + \beta^2)}$ y $\Gamma_{22}^2 = \frac{\beta\delta'}{2(\alpha\delta + \beta^2)}$, por lo que al sustituir en las ecuaciones de las geodésicas sólo nos queda que y es solución de la ecuación

$$y'' + \frac{\beta(a)\delta'(a)}{2(\alpha(a)\delta(a) + \beta(a)^2)}y'^2 = 0,$$

y como $\delta'(a) \neq 0$ se tendrá $\frac{\beta(a)\delta'(a)}{2(\alpha(a)\delta(a) + \beta(a)^2)} \neq 0$ y constante.

Observación 3.3. En este caso la familia (\mathbb{R}^2, g) nos da contraejemplos a una conjetura que por la siguiente proposición 3.4 podría parecernos razonable. Se tienen toros lorentzianos incompletos con un campo de Killing que no es tipo espacio (que nunca es cero) en ningún punto.

- Si $\delta > 0$ ó $\delta < 0$ entonces la métrica g es completa.

Para demostrar esta propiedad utilizaremos la siguiente proposición y el campo de Killing $\partial/\partial y$; en este caso, $g(\partial/\partial y, \partial/\partial y) = -\delta(x)$ por lo que este campo será tipo tiempo si $\delta > 0$ ó tipo espacio si $\delta < 0$.

Proposición 3.4. *Una variedad lorentziana compacta (M, g) que tiene un campo de Killing tipo tiempo K es completa.*

Demostración. Sea γ cualquier geodésica en M , la cual cumple que $g(\gamma', \gamma')$ es constante. Por el lema 1.5 es suficiente ver que γ' cae en un subconjunto compacto de TM . Para esto veremos que la proyección de γ' en el subhaz generado por K , $\mathcal{L}(K)$, cae en un subconjunto compacto de este subhaz; ya que podemos trasladar de manera continua al subconjunto compacto en TM para que cubra a γ' .

Como K es tipo tiempo y M es compacto, tenemos que $\inf |g(K, K)| > 0$. Esto nos dice que el subhaz $\mathcal{L}(K)$ es cerrado en TM , por lo que basta ver que $g(K, \gamma')$ es acotado.

Sea $\pi : TM \rightarrow \mathcal{L}(K)$ la proyección sobre el subhaz, entonces $\pi(\gamma'(t)) = hK(\gamma(t))$ con h una constante, esto pasa gracias al lema 1.7 que nos dice que $g(K, \gamma') = h$ es constante cuando K es un campo de Killing. Vamos a considerar el siguiente subconjunto

$$C = \{ \{p\} \times \{ \alpha K(p) \mid \alpha \in [a, b] \} \mid p \in M \} \subset \mathcal{L}(K)$$

donde a y b son reales tales que $h \in [a, b]$ y $bK(p) - aK(p) < \epsilon$ para todo $p \in M$, con ϵ el radio mínimo para la vecindad normal en M . Esto se puede gracias a que M es compacta. Afirmamos que C es un subconjunto compacto de TM . Sea $\{(p_n, v_n)\}$ una sucesión en C .

- Si existe $p \in M$ tal que hay una infinidad de $v_n \in \{ \alpha K(p) \mid \alpha \in [a, b] \}$, entonces se obtiene la subsucesión convergente pues $\{ \alpha K(p) \mid \alpha \in [a, b] \}$ es compacto.
- Si no existe $p \in M$ tal que hay una infinidad de $v_n \in \{ \alpha K(p) \mid \alpha \in [a, b] \}$, entonces se tiene que existe una subsucesión, donde dejaremos el mismo índice por motivos prácticos, $\{p_n\}$ que converge a p ya que M es compacto. Trasladamos los intervalos correspondientes para cada punto en M al origen para que podamos tomar una vecindad normal de p . Entonces vamos a poder ver, para una n suficientemente grande, a la sucesión metida en un subconjunto cerrado y acotado en T_pM , por lo que $\{v_n\}$ converge a un v en $\{ \alpha K(p) \mid \alpha \in [a, b] \}$.

Por lo tanto C es compacto, lo que implica que la curva γ es completa. \square

En resumen, si $\delta > 0$ (ó $\delta < 0$) en la métrica g , tenemos un campo de Killing tipo tiempo (ó un campo de Killing tipo espacio que no se anula), por lo que gracias a la Proposición 3.4 (para el caso de tipo espacio, invertimos el signo de la métrica) podemos concluir que (\mathbb{R}^2, g) es completo.

4. Comentarios finales

La familia de métricas (\mathbb{R}^2, g) introducida en la sección anterior nos permite encontrar contraejemplos a algunas conjeturas, como vimos en la observación 3.3. Mencionaremos algunas consecuencias menos directas:

Gracias al lema 1.5 sabemos que si tenemos una geodésica incompleta en una variedad lorentziana compacta M , entonces la imagen de sus vectores velocidad no está contenida en ningún subconjunto compacto de TM . Contraejemplos de lo inverso se encuentran en la familia definida en la sección anterior, esto es, existe una geodésica completa en el toro lorentziano cuyos vectores velocidad salen de cualquier conjunto compacto.

Una consecuencia más sutil es la siguiente. Sea (M, g) una variedad lorentziana compacta, TM^* el haz tangente perforado, es decir, $TM^* = TM \setminus \{\text{sección cero}\}$ y sea J un subconjunto de TM^* que contiene a todos los vectores que son tangentes a geodésicas incompletas, es decir

$$J = \{ X_p \in TM^* \mid t \mapsto \exp(tX_p) \text{ es incompleta} \}.$$

Estudiar al conjunto J es de mucha utilidad pues nos puede dar información sobre la completez de nuestra variedad lorentziana M . Sobre todo nos gustaría poder decir si J es cerrado o es abierto dependiendo de M , pero no es tan fácil ya que gracias a la sección anterior tenemos ejemplos de toros en donde J puede ni ser cerrado ni abierto. Se puede encontrar mayor información sobre J en [RSj].

Como hemos visto, estos ejemplos nos ayudan a comprender las condiciones que necesitamos pedir para que la variedad lorentziana compacta sea completa. Sabemos que la variedad lorentziana compacta es completa si le pedimos que sea homogénea, o tenga curvatura constante, o admita un campo de Killing tipo tiempo. Siguiendo esta línea de investigación encontramos un resultado más reciente de Thomas Leistner y Daniel Schliebner en [LS] que nos dice que si una variedad lorentziana compacta admite un campo paralelo tipo luz V y su tensor de curvatura R satisface que $R(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in V^\perp$, entonces la variedad es completa.

Todavía hay muchas preguntas abiertas, como la independendencia de los tres tipos de completez en variedades lorentzianas compactas, pero contar con una gran cantidad de ejemplos es de gran utilidad para ir encontrando las respuestas y que surjan aún más preguntas.

Referencias

- [B] J.K. BEEM, *Some examples of incomplete spacetimes*, Gen. Rel. Grav. 7, 1976, 501-509.
- [CS] A. CANDELA Y M. SÁNCHEZ, *Geodesics in semi-Riemannian manifolds: geometric properties and variational tools*, In: Recent Developments in pseudo-Riemannian Geometry (D.V. Alekseevsky & H. Baum eds.), Special Volume in the ESI-Series on Mathematics and Physics, EMS Pub. House, Zürich, 2008, 359-418.
- [FC] F. DE FELICE Y C.J.S. CLARKE, *Relativity on curved manifolds*, Cambridge monographs on Mathematical Physics, 1990.
- [Ge] R.P. GEROCH, *What is a singularity in General Relativity?*, Ann. Phys. (N.Y.) 48, 1968, 526-540.
- [Ku] W. KUNDT, *Note on the completeness of spacetimes*, Zs. f. Phys. 172, 1963, 488-489.
- [LS] T. LEISTNER Y D. SCHLIEBNER, *Completeness of compact lorentzian manifolds with special holonomy*, arxiv:1306.0120, 2013.
- [M] J.E. MARSDEN, *On completeness of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. 22, 1973, 1065-1066.
- [NO] K. NOMIZU Y H. OZEKI, *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 1961, 889-891.
- [O] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, N.Y., 1983.
- [RS] A. ROMERO, M. SÁNCHEZ, *On completeness of compact Lorentzian manifolds*, Chapter in Geometry and topology of submanifolds, VI (Leuven, 1993 Brussels, 1993) World Sci. Publ. , River Edge, NJ 1994 , 171-182.
- [RSj] A. ROMERO, M. SÁNCHEZ, *On the completeness of geodesics obtained as a limit*, J. Math. Phys. 34, 1993, 3768-3774.