



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE LA ESFERA

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANDRÉS AHUMADA GÓMEZ

DIRECTOR DE TESINA:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2017

A mis papás.

Agradecimientos:

Primero que nada quisiera agradecer a mis papás por todo lo que han hecho y hacen por mi, quisiera decirles que esto es todo para ustedes. ¡Muchas gracias y los quiero muchísimo!

Me gustaría también agradecer al Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco por ser un profesor genial y sus buenísimas clases, pero sobre todo su fantástica ayuda y guía en la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Teorema de Toponogov	3
Capítulo 2. Puntos críticos de funciones distancia	15
Capítulo 3. Una generalización del teorema de la esfera	21
Comentarios finales	27
Apéndice A. Unos resultados de comparación	29
Bibliografía	31

Introducción

A principios de los años sesenta Harry Rauch, Wilhelm Klingenberg y Marcel Berger demostraron lo que ahora se conoce como el teorema de la esfera clásico que dice lo siguiente:

TEOREMA DE LA ESFERA. *Sea (M, g) una n -variedad riemanniana compacta y simplemente conexa, cuya curvatura seccional K es tal que*

$$\frac{1}{4r^2} < K \leq \frac{1}{r^2}.$$

Entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}_r^n , donde \mathbb{S}_r^n denota la esfera de radio r en \mathbb{R}^{n+1} .

El objetivo de esta tesina es la presentación y demostración de una generalización de dicho teorema dada por Karsten Grove y Katsuhiko Shiohama en 1977. A este teorema se le llamará en este trabajo el teorema generalizado de la esfera (TGE):

TEOREMA GENERALIZADO DE LA ESFERA. *Sea (M, g) una n -variedad riemanniana completa y conexa, cuya curvatura seccional K es tal que*

$$0 < \delta \leq K$$

y

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \text{diam}(M).$$

Entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

De las hipótesis del teorema se puede observar lo siguiente:

1. Si hace un reescalamiento de la métrica se puede suponer que

$$0 < \delta \leq K \leq 1.$$

2. Por el teorema de Bonnet, M es además compacta y se tiene

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Cabe destacar que esta generalización no es la única, se han hecho generalizaciones en varias direcciones. Unas de ellas pertenecen a la teoría de subvariedades y otras a la teoría de espacios de Alexandrov.

A lo largo de este trabajo se usarán nociones y resultados básicos de geometría riemanniana que pueden encontrarse en [Cheeger-Ebin], [Lee 2] y [Gromoll-Klingenberg-Meyer].

Teorema de Toponogov

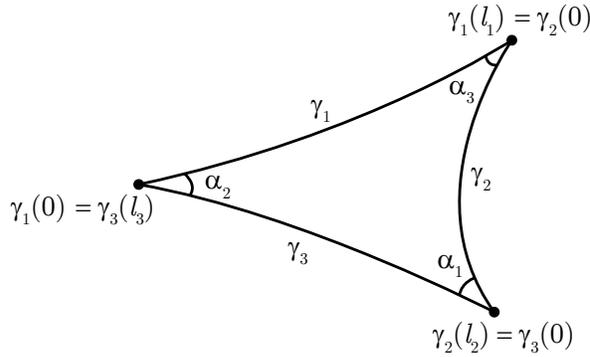
El teorema de Toponogov (ó teorema de comparación de Toponogov) es un resultado muy importante en la demostración del TGE que nos permite comparar triángulos entre dos variedades. La primera versión de este resultado fue publicada por Victor Andreevich Toponogov en 1959 y se han hecho algunas mejoras a este resultado. Como observación se puede mencionar que la primera demostración que se dió del teorema clásico de la esfera usaba este teorema.

En este capítulo se demostrará dicho teorema y para entender lo que éste dice se requieren las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN. Un *triángulo geodésico* en una variedad riemanniana M es un conjunto de tres segmentos geodésicos parametrizados por longitud de arco $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ de longitudes l_1, l_2, l_3 tal que $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$ y $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$. Sea

$$\alpha_i = \sphericalangle(-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1}), \dot{\gamma}_{i+2}(0))$$

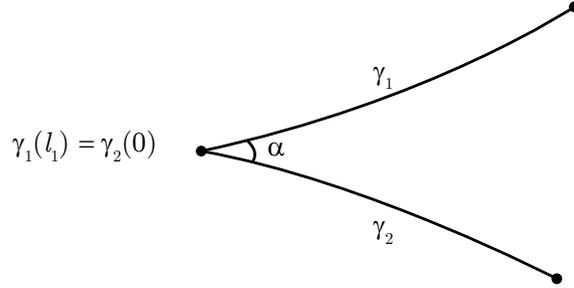
el ángulo entre $-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1})$ y $\dot{\gamma}_{i+2}(0)$, con $0 \leq \alpha_i \leq \pi$. Los índices se toman módulo 3.



DEFINICIÓN. Sean γ_1 y γ_2 segmentos geodésicos en M tal que $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ y

$$\alpha = \sphericalangle(-\dot{\gamma}_1(l_1), \dot{\gamma}_2(0)).$$

A esta configuración se le llama *bisagra* y se denota por $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$.



DEFINICIÓN. Se define M^H como la 2-variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura seccional constante H . Se denotará a la distancia riemanniana en M^H por d_H .

TEOREMA 1.1 (Toponogov). *Sea M una n -variedad riemanniana completa con curvatura seccional $K \geq H$.*

- (A) *Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ triángulo geodésico. Supóngase que γ_1 y γ_3 son minimizantes y si $H > 0$, supóngase que $L(\gamma_2) \leq \pi/\sqrt{H}$. Entonces en M^H hay un triángulo geodésico $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ tal que $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$, $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$ y $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Excepto en el caso $H > 0$ y $L(\gamma_i) = \pi/\sqrt{H}$ para algún i , el triángulo en M^H está determinado de manera única.*
- (B) *Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra. Supóngase que γ_1 es minimizante y si $H > 0$, también supóngase que $L(\gamma_2) \leq \pi/\sqrt{H}$. Sean $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \subset M^H$ segmentos geodésicos tales que $\bar{\gamma}_1(l_1) = \bar{\gamma}_2(0)$, $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) = l_i$ y $\alpha = \angle(-\dot{\bar{\gamma}}_1(l_1), \dot{\bar{\gamma}}_2(0))$. Entonces*

$$d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) = d_H(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

La demostración del teorema de Toponogov se dividirá en 10 partes. Cualquier condición sobre \sqrt{H} debe ser ignorada si $H \leq 0$. Además en el caso $H > 0$ se considerará $\varepsilon > 0$ tal que $H - \varepsilon > 0$ y se trabajará con $M^{H-\varepsilon}$.

PARTE 1. Sea $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\bar{\gamma}_i) \leq \pi/\sqrt{H}$, $i = 1, 2$. Conforme α crece de 0 a π , $f(\alpha) := d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2))$ crece de manera estrictamente monótona de $|l_1 - l_2|$ a

$$D = \min \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}, l_1 + l_2 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Considérese $\bar{\gamma}_1$ fija y $\bar{\gamma}_2$ variando.

Si $H \leq 0$, por el teorema de Cartan-Hadamard (Teorema 1.39 en [Cheeger-Ebin]), M^H es simplemente conexa, en especial $\exp_{\bar{\gamma}_1(0)}$ es difeomorfismo. Así, $d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2))$ es una función suave de α en $(0, \pi)$.

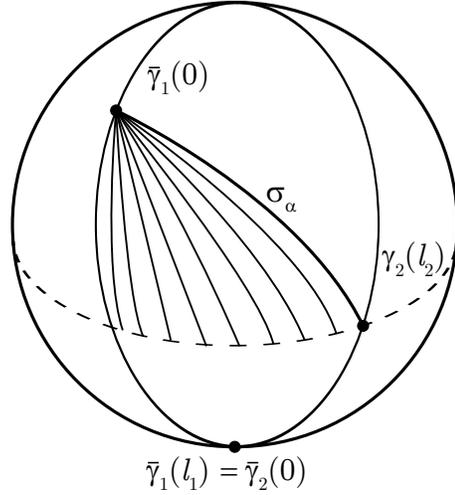
Si $H > 0$, $d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2))$ es también una función suave de α . Para ver esto, es suficiente ver que $d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) < \pi/\sqrt{H-\varepsilon}$ porque esto implicaría que $\bar{\gamma}_2(l_2)$ está dentro de una bola geodésica con centro en $\bar{\gamma}_1(0)$ y se tendría el resultado. Supóngase que

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}},$$

entonces $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ es la unión de dos segmentos geodésicos que unen puntos antipodales en $M^{H-\varepsilon}$, una 2-esfera con curvatura $H - \varepsilon$. Como cada segmento tiene longitud menor a $\pi/\sqrt{H-\varepsilon}$ y como

cada $\tilde{\gamma}_i$ es un segmento geodésico, $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ es una geodésica suave que une a $\tilde{\gamma}_1(0)$ y $\tilde{\gamma}_2(l_2)$. Esto implica que $\alpha = \pi$, lo que es una contradicción y, por lo tanto f es suave.

Ahora se verá el crecimiento de f . Para ello nótese que conforme $\tilde{\gamma}_2(l_2)$ se mueve, traza un círculo de radio l_2 alrededor de $\tilde{\gamma}_2(0)$. Se afirma que la geodésica minimizante de σ_α de $\tilde{\gamma}_1(0)$ a $\tilde{\gamma}_2(l_2)$ es perpendicular a dicho círculo sólo cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$. Si lo fuera, $\sigma \cup -\tilde{\gamma}_2$ formaría otra geodésica suave de $\tilde{\gamma}_1(0)$ a $\tilde{\gamma}_2(l_2)$. Lo cual es imposible si $H \leq 0$ por el teorema de Cartan-Hadamard y si $H > 0$ se tendría que $l_1 = \pi/\sqrt{H-\varepsilon} > \pi/\sqrt{H}$, lo cual contradice la hipótesis sobre l_1 .



Dicho lo anterior, i.e., la «no perpendicularidad» de las geodésicas σ_α y usando la fórmula de primera variación con la variación por geodésicas σ_α ,

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \mathcal{L}(\sigma_\alpha) = - \underbrace{\int_0^{L(\sigma_{\alpha_0})} \langle V, D_t \sigma_{\alpha_0} \rangle_g dt}_{(a)} + \underbrace{\langle V(L(\sigma_{\alpha_0})), \sigma_{\alpha_0}(L(\sigma_{\alpha_0})) \rangle_g}_{(b)},$$

con $\alpha_0 > 0$ fijo y donde \mathcal{L} denota el funcional de longitud V es el campo de variación de σ_α . Por un lado, (a) es cero pues σ_ε es geodésica y (b) es distinto de cero por la «no perpendicularidad». Así, $f'(\alpha) \neq 0$ para $\alpha \in (0, \pi)$. Por lo tanto, f es estrictamente monótona. Como $f(\pi) = D$ y $f(0) = |l_2 - l_1| < D$ por la geometría de $M^{H-\varepsilon}$, entonces f es creciente. Q. E. D.

PARTE 2. En $M^{H-\varepsilon}$ un triángulo con lados de longitud menor o igual a π/\sqrt{H} está determinado salvo congruencias por la longitud de sus lados.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3)$ un triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\tilde{\gamma}_1) \leq \pi/\sqrt{H}$. Considérese $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ otro triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ tal que $L(\tilde{\gamma}_i) = L(\bar{\sigma}_i)$.

Para $L(\tilde{\gamma}_1)$ y $L(\tilde{\gamma}_2)$, de la Parte 1 se tiene que $L(\tilde{\gamma}_3)$ determina de manera única α_3 . Ahora bien, de la homogeneidad de $M^{H-\varepsilon}$ (pues es \mathbb{S}_r^2 , \mathbb{R}^2 ó \mathbb{H}_r^2), existe una isometría que manda a $\bar{\sigma}_1$ en $\tilde{\gamma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ en $\tilde{\gamma}_2$ y, por lo dicho antes, $\bar{\sigma}_3$ en $\tilde{\gamma}_3$. Q. E. D.

PARTE 3. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ una bisagra en M tal que γ_1 es minimizante y $L(\gamma_2) \leq \pi/\sqrt{H}$. Entonces son equivalentes:

- (a) Sea γ_3 una geodésica minimizante de $\gamma_2(l_2)$ a $\gamma_1(0)$. Entonces existe un triángulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$ y $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.
- (b) Sea $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$, $i = 1, 2$. Entonces

$$l_2 - l_1 \leq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Dado $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ como en (b), se forma el triángulo geodésico $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde γ_3 es una geodésica minimizante de $\gamma_2(l_2)$ a $\gamma_1(0)$.

Se supone que $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ forma efectivamente un triángulo, i. e., $l_1 + l_3 \geq l_2$ y $l_2 + l_3 \geq l_1$. En caso contrario se tendría que $l_3 < l_2 - l_1$ ó $l_2 - l_1 < -l_3$ y junto con (a) se tendría trivialmente el resultado.

Por (a) se tiene un triángulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$ y $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Así, conforme $\bar{\alpha}_3$ aumente a α_3 manteniendo $L(\bar{\gamma}_1)$ y $L(\bar{\gamma}_2)$ constantes, la función $d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2))$ es no-decreciente por la Parte 1. Por lo tanto,

$$l_2 - l_1 \leq l_3 = d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) = d_H(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \stackrel{(*)}{\leq} d_H(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)),$$

(*) se obtiene al hacer el aumento del ángulo en $M^{H-\varepsilon}$.

(b) \Rightarrow (a). Sea γ_3 una geodésica minimizante de $\gamma_2(l_2)$ a $\gamma_1(0)$. Por (b), si $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \subset M^{H-\varepsilon}$ y $\angle(-\bar{\gamma}_1(l_1), \bar{\gamma}_2(0)) = \alpha_3$, entonces

$$d_H(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) = l_3 \geq l_2 - l_1.$$

Además, como $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ satisface la desigualdad del triángulo, se tiene que $l_3 \geq l_1 - l_2$. Es decir, $|l_2 - l_1| \geq l_3 = d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$. Juntando esto y la Parte 1, se puede reducir el ángulo α_3 entre $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$ hasta un ángulo $\bar{\alpha}_3$ de manera que

$$d_H(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Si $\bar{\gamma}_3$ es la geodésica minimizante entre $\bar{\gamma}_1(0)$ y $\bar{\gamma}_2(l_2)$, entonces $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ y $\bar{\gamma}_3$ forman un triángulo geodésico con $L(\gamma_1) = L(\bar{\gamma}_1)$, $L(\gamma_2) = L(\bar{\gamma}_2)$, $L(\gamma_3) = L(\bar{\gamma}_3)$ y $\alpha_3 \leq \bar{\alpha}_3$. Q. E. D.

Para continuar con la demostración se necesitan unos resultados para la comparación de longitudes de ciertas curvas, sin embargo dichos resultados serán expuestos en el apéndice A.

Ahora, previo a la Parte 4, se ocupa una definición para la mejor exposición y desarrollo de la demostración del teorema.

DEFINICIÓN. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ una bisagra. Se dirá que esta bisagra es *pequeña* si

$$\frac{r}{2} = \max_{i=1,2} \{L(\gamma_i)\}$$

y $\exp_{\gamma_2(0)}|_{B_r(0)}$ es un encaje.

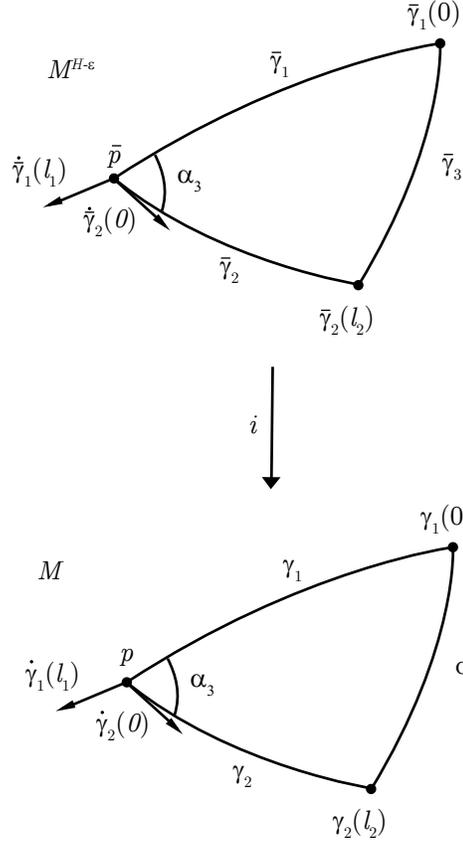
Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triángulo. Se dirá que este triángulo es *pequeño* si cada una de las bisagras $(\gamma_i, \gamma_{i+1}, \alpha_3)$ es pequeña.

PARTE 4. (A) se satisface para triángulos pequeños y (B) se satisface para bisagras pequeñas.

DEMOSTRACIÓN. Primero se mostrará (B) para bisagras pequeñas y después se aplicará la Parte 3 para probar (A) en triángulos pequeños.

Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ una bisagra pequeña en M y sea $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ tal que $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$, $i = 1, 2$. Sean $p = \gamma(l_1)$ y $\bar{p} = \bar{\gamma}_1(l_1)$. Además considérense $\bar{\gamma}_3$ una geodésica

minimizante que une a $\bar{\gamma}_2(l_2)$ con $\bar{\gamma}_1(0)$ y una isometría inyectiva $i: T_{\bar{p}}M^{H-\varepsilon} \rightarrow T_pM$ tal que $i(\dot{\bar{\gamma}}_1(l_1)) = \dot{\gamma}_1(l_1)$ e $i(\dot{\bar{\gamma}}_2(0)) = \dot{\gamma}_2(0)$.



Se define la curva en M como

$$c = \exp_p \circ i \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{\gamma}_3),$$

que conecta $\gamma_2(l_2)$ con $\gamma_1(0)$. Como la bisagra es pequeña, se puede aplicar el Corolario A.2 del teorema de comparación de Rauch y se tiene que

$$L(c) \leq L(\bar{\gamma}_3).$$

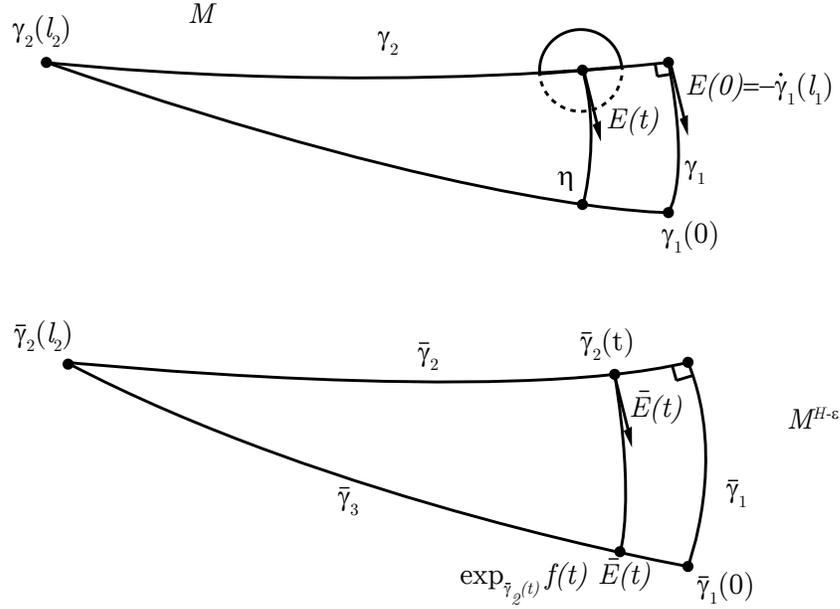
Por lo tanto, (B) se satisface para bisagras pequeñas.

Ahora bien, tómesese fijo un vértice en un triángulo pequeño $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, sea $\gamma_2(0)$ tal vértice. Usando la Parte 3, la bisagra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ y lo anterior, existe un triángulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$ y $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Recordando la Parte 2 se sabe que los triángulos en $M^{H-\varepsilon}$ están determinados por la longitud de sus lados. De ahí, si se toma cualquier otro vértice y se aplica el

procedimiento anterior, se obtendría el mismo triángulo. En consecuencia, existe un único triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i)$ y $\bar{\alpha}_i \leq \alpha_i$, i.e., se tiene (A) para triángulos pequeños. Q. E. D.

Considérese ahora lo siguiente.

DEFINICIÓN. Sean $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$ una bisagra en M y $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \pi/2)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i)$.



Sea $\tilde{\gamma}_3$ una geodésica minimizante de $\tilde{\gamma}_1(0)$ a $\tilde{\gamma}_2(l_2)$, que se puede escribir como

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \exp_{\tilde{\gamma}_2(t)} f(t) \bar{E}(t),$$

donde \bar{E} es un campo vectorial unitario, paralelo a lo largo de $\tilde{\gamma}_2$ y perpendicular $\dot{\tilde{\gamma}}_2$, y $f: [0, l_2] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función apropiada. Sea E un campo vectorial unitario, paralelo a lo largo de γ_2 , perpendicular a $\dot{\gamma}_2$ y con $E(0) = -\dot{\gamma}_1(l_1)$. Se dice que $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$ es una bisagra *recta delgada* si las hipótesis del Corolario A.4 del teorema de Berger se aplican a las curvas

$$\exp_{\gamma_2(t)} f(t) E(t)$$

y

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \exp_{\tilde{\gamma}_2(t)} f(t) \bar{E}(t).$$

Lo cual es equivalente a pedir que para ningún t hay puntos focales de la subvariedad geodésica determinada por $E(t)$ a lo largo de la geodésica

$$s \mapsto \exp_{\gamma_2(t)} s E(t)$$

para $s < f(t)$.

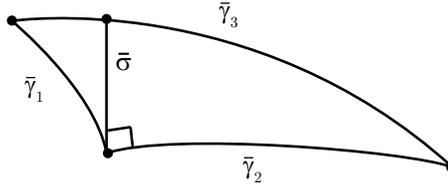
PARTE 5. (B) se satisface para bisagras rectas delgadas.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato del Corolario A.4.

Q. E. D.

DEFINICIÓN. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra en M con $\alpha > \pi/2$ y considérese $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ la bisagra correspondiente en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$. Sean $\bar{\gamma}_3$ la geodésica minimizante de $\bar{\gamma}_2(l_2)$ a $\bar{\gamma}_1(0)$ y $\bar{\sigma}: [0, l] \rightarrow M^{H-\varepsilon}$ el segmento geodésico que emana de $\bar{\gamma}_2(0)$ que satisface

- $g(\dot{\bar{\sigma}}(0), \dot{\bar{\gamma}}_2(0)) = 0$,
- $\dot{\bar{\sigma}}(0) = -\delta \dot{\bar{\gamma}}_1(l_1) + \beta \dot{\bar{\gamma}}_2(0)$ con $\delta, \beta > 0$, y
- $\bar{\sigma}(l)$ es el primer punto de $\bar{\sigma}$ que toca a $\bar{\gamma}_3$.



Sea $\sigma: [0, l] \rightarrow M$ el segmento geodésico que emana de $\gamma_2(0)$ tal que

- $g(\dot{\sigma}(0), \dot{\gamma}_2(0)) = 0$,
- $\dot{\sigma}(0) = -\delta \dot{\gamma}_1(l_1) + \beta \dot{\gamma}_2(0)$ y
- $L(\sigma) = L(\bar{\sigma})$.



Se dice que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ es una bisagra *obtusa delgada* si $(\gamma_1, \sigma, \alpha - \pi/2)$ es una bisagra pequeña y si $(\sigma, \gamma_2, \pi/2)$ es una bisagra recta delgada.

PARTE 6. (B) se satisface para bisagras obtusas delgadas.

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad del triángulo en M se tiene

$$d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d_g(\gamma_1(0), \sigma(l)) + d_g(\sigma(l), \gamma_2(l_2)).$$

Por la Parte 4,

$$d_g(\gamma_1(0), \sigma(l)) \leq d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)).$$

Por la Parte 5,

$$d_g(\sigma(l), \gamma_2(l_2)) \leq d_{H-\varepsilon}(\bar{\sigma}(l), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Entonces

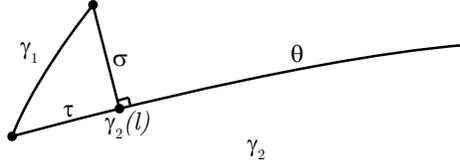
$$d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)) + d_{H-\varepsilon}(\bar{\sigma}(l), \bar{\gamma}_2(l_2)) = d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Q. E. D.

DEFINICIÓN. Sea una $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra con $\alpha < \pi/2$. Sea $\gamma_2(l)$ el punto más cercano a $\gamma_1(0)$. Sea

$$\tau = \gamma_2|_{[0, l]}, \quad \theta = \gamma_2|_{[l, l_2]}$$

y $\sigma: [0, k] \rightarrow M$ una geodésica minimizante de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(l)$. Se dice que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ es una bisagra *aguda delgada* si (γ_1, τ, σ) es un triángulo pequeño, $0 < l < l_2$ y $(\sigma, \theta, \pi/2)$ es una bisagra recta delgada.



PARTE 7. (B) se satisface para bisagras agudas delgadas.

DEMOSTRACIÓN. Por la Parte 4, existe un triángulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\tau}, \bar{\sigma})$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\bar{\gamma}_1) = L(\gamma_1)$, $L(\bar{\tau}) = L(\tau)$, $L(\bar{\sigma}) = L(\sigma)$ y $\sphericalangle(-\dot{\bar{\gamma}}_1(l_1), \dot{\bar{\tau}}(0)) = \bar{\alpha} \leq \alpha$. Además, $\sphericalangle(-\dot{\bar{\tau}}(l), -\dot{\bar{\sigma}}(k)) = \bar{\alpha}_1 \leq \pi/2$.

Sea $\bar{\theta}: [l, l_2] \rightarrow M^{H-\varepsilon}$ geodésica definida por $\bar{\theta}(l) = \bar{\tau}(l)$ y $\dot{\bar{\theta}}(l) = \dot{\bar{\tau}}(l)$, y sea $\bar{\gamma}_2 = \bar{\tau} \cup \bar{\theta}$. Entonces

$$\sphericalangle(-\dot{\bar{\sigma}}(k), \dot{\bar{\theta}}(l)) = \pi - \bar{\alpha}_1 \geq \frac{\pi}{2}.$$

Como $(\sigma, \theta, \pi/2)$ es una bisagra recta delgada y usando las Partes 1 y 5 se tiene que

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\sigma}(0), \bar{\theta}(l_2)) \geq d_g(\sigma(0), \theta(l_2)).$$

Pero $\bar{\sigma}(0) = \bar{\gamma}_1(0)$, $\sigma(0) = \gamma_1(0)$, $\bar{\theta}(l_2) = \bar{\gamma}_2(l_2)$ y $\theta(l_2) = \gamma_2(l_2)$. Así,

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Finalmente, como $\bar{\alpha} \leq \alpha$ y usando de nueva cuenta la Parte 1, aumentando el ángulo de $\bar{\alpha}$ a α se tiene lo que se quería:

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

con la bisagra $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$.

Q. E. D.

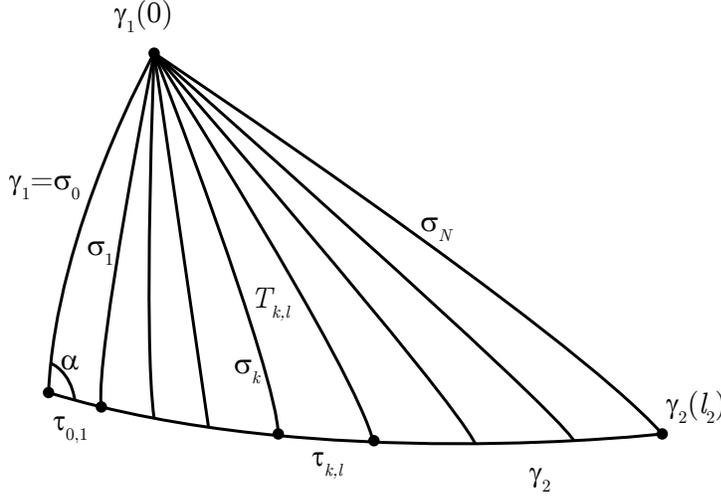
DEFINICIÓN. Un triángulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ se dice que es *delgado* si $(\gamma_2, \gamma_1, \alpha_3)$ y $(\gamma_2, \gamma_3, \alpha_1)$ son bisagras delgadas.

OBSERVACIÓN. El teorema se satisface para triángulos delgados por las Partes 5, 6, 7 y 2.

Ahora se probará el teorema de manera general. Considérese una bisagra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ como en (B). Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo y sea

$$\tau_{k,l} = \gamma_2|_{\left[\frac{kl_2}{N}, \frac{(k+l)l_2}{N}\right]},$$

donde k y l son enteros positivos con $0 \leq k + l \leq N$. Sea σ_k geodésica miniizante de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(kl_2/N)$ y sea $T_{k,l} = (\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+l})$.



Se puede suponer que $L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2)$ porque en caso contrario se tendría que

$$L(\gamma_1) + L(\sigma_N) < L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}.$$

Las dos últimas desigualdades se cumplen si $H > 0$ usando el teorema de Bonnet y sólo son necesarias en ese caso. En cualquier caso lo anterior implicaría a su vez que se puede construir con geodésicas minimizantes una bisagra $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \alpha)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L(\gamma_1) = L(\tilde{\gamma}_1)$ y $L(\gamma_2) = L(\tilde{\gamma}_2)$, y usando la desigualdad del triángulo,

$$d_{H-\varepsilon}(\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(l_2)) \geq L(\tilde{\gamma}_2) - L(\tilde{\gamma}_1).$$

Es decir,

$$d_{H-\varepsilon}(\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(l_2)) \geq L(\tilde{\gamma}_2) - L(\tilde{\gamma}_1) = L(\gamma_2) - L(\gamma_1) > L(\sigma_N) = d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

y se tendría (B).

Ahora se afirma que $T_{k,l}$ forma un triángulo. i.e., todas las desigualdades del triángulo se satisfacen. Para ver esto, se consideran las siguientes desigualdades

- (1) $L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2),$
- (2) $L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) \geq L(\gamma_1),$
- (3) $L(\tau_{k+l, N-k-l}) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\sigma_N).$

La desigualdad (1) se satisface por lo anterior, (2) se cumple porque usando la desigualdad del triángulo y el hecho de que σ_k y γ_1 son minimizantes,

$$L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) \geq d_g(\gamma_2(0), \gamma_2(kl_2/N)) + L(\sigma_k) \geq L(\gamma_1).$$

Y (3) se sigue de que tanto σ_{k+l} como σ_N son minimizantes y usando la desigualdad del triángulo,

$$L(\tau_{k+l, N-k-l}) + L(\sigma_{k+l}) \geq d_g(\gamma_2((k+l)l_2/N), \gamma_2(l_2)) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\sigma_N).$$

De ahí,

$$L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) + L(\tau_{k+l, N-k-l}) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2) = L(\tau_{0,k}) + L(\tau_{k,l}) + L(\tau_{k+l, N-k-l}).$$

Y por lo tanto, $L(\sigma_k) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\tau_{k,l})$, es decir, $T_{k,l}$ es triángulo.

A continuación se afirma que si N es suficientemente grande, los triángulos $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$ son todos delgados. Para mostrar esto considérense las geodésicas minimizantes σ_t de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(t)$ y sea C el conjunto de las geodésicas en M , el cual es compacto.

NOTA. En el caso $H > 0$ cabe destacar que para aplicar el corolario A.4 en la Parte 5, y consecuentemente en las Partes 6 y 7, si $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ es una bisagra delgada, entonces se requiere que

$$L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$$

para construir la bisagra correspondiente en $M^{H-\varepsilon}$. Así, como las geodésicas σ_t son minimizantes y por el teorema de Bonnet se tiene que

$$L(\sigma_t) \leq \text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}.$$

Por lo tanto en este sentido sí se tiene lo requerido para que $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$ sea triángulo delgado.

Para continuar la demostración de la afirmación anterior se requiere hacer un paréntesis con la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Sea M una variedad riemanniana completa, $p \in M$ y $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ geodésica normalizada que parte de p . Si $t > 0$ es suficientemente pequeño, $d_g(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, es decir, $\gamma|_{[0,t]}$ es minimizante. Si $\gamma|_{[0,t_1]}$ no es minimizante entonces tampoco lo será para $t > t_1$. Por continuidad, el conjunto de números para los cuales $d_g(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ es de la forma $[0, t_0]$ ó $[0, \infty)$. En el primer caso, $\gamma(t_0)$ se llama *el punto de corte de p a lo largo de γ* y en el segundo caso se dice que dicho punto no existe. Se define *el lugar de corte de p* , denotado ór $C_M(p)$, como la unión de todos los puntos de corte de p a lo largo de todas las geodésicas que parten de él. Se puede demostrar que \exp_p es difeomorfismo en una bola de radio menor o igual a la distancia de p a $C_M(p)$. Ahora considérese la función

$$f: SM \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

dada por:

$$f(p, V) = \begin{cases} t_0 & \text{si } \gamma_V(t_0) \text{ es punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_V, \\ \infty & \text{si no existe el punto de corte de } p \text{ a lo largo de } \gamma_V, \end{cases}$$

donde

$$SM := \{(p, V) \in TM \mid |V|_g = 1\}$$

es el haz tangente unitario, γ_V denota la geodésica normalizada que parte de p con velocidad inicial V y a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se le da la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) = (a, \infty) \cup \{\infty\} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

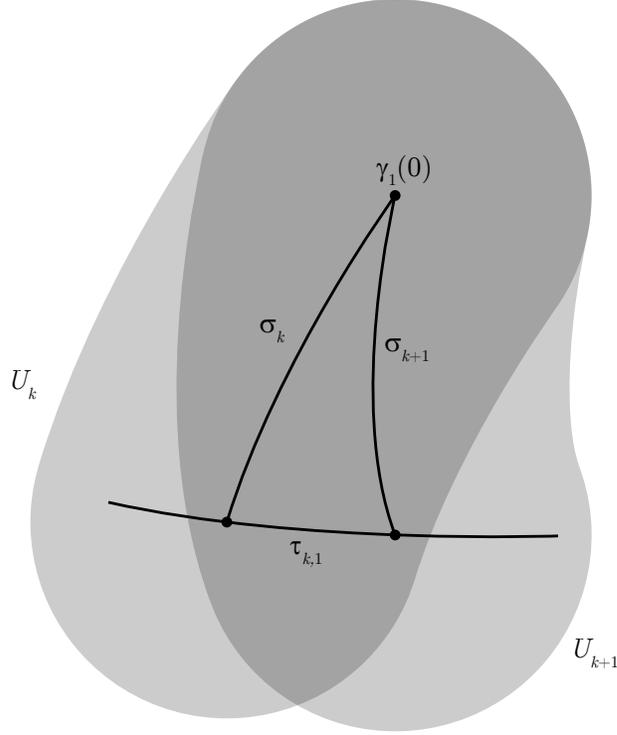
Se puede demostrar que si M es completa, entonces f es continua. Como consecuencia de esto se tiene que $C_M(p)$ es cerrada. Las demostraciones de estas afirmaciones pueden ser encontradas en [Carmo].

Ahora, si se restringe f a C , el dominio seguirá siendo compacto y por lo tanto f alcanza un mínimo. Sea φ el valor mínimo de f si éste pertenece a \mathbb{R} y en caso contrario sea φ cualquier número real. Como cada σ_t es compacta, se puede dar una vecindad tubular U_t de radio φ . Más aún, como se construyó φ , se tiene que

$$\exp_{\sigma_t(s)}: B(0, \varphi) \rightarrow B_g(\sigma_t(s), \varphi)$$

es difeomorfismo para todo s y para todo t , donde $B(0, \varphi)$ denota la bola abierta en $T_{\sigma_t(s)}M$ con centro en el origen y radio φ , y $B_g(\sigma_t(s), \varphi)$ denota la bola geodésica con centro en $\sigma_t(s)$ y radio φ .

Finalmente, considérese N suficientemente grande de manera que $\varphi > 1/N$. Usando esta N , φ y las vecindades tubulares, $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1}) \subset U_k \cap U_{k+1}$, donde U_k denota la vecindad tubular de σ_k de radio φ .



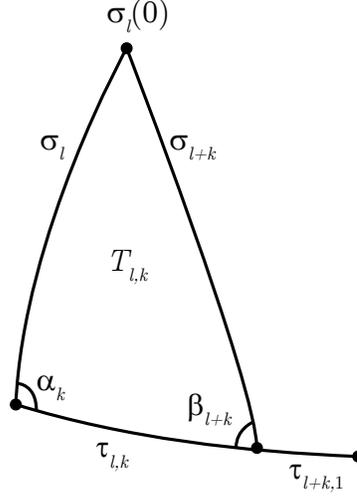
Por construcción, las geodésicas están suficientemente cerca de manera que $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$ es delgado.

PARTE 8. Si (A) es verdad para $T_{l,k}$ con k fija y para todo l , entonces (B) es verdad para $T_{l,k+1}$ con k fija y para todo l .

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo (A) para $T_{l,k}$, hay un triángulo $\bar{T}_{l,k} = (\bar{\sigma}_l, \bar{\tau}_{l,k}, \bar{\sigma}_{l+k})$ en $M^{H-\varepsilon}$ tal que

$$\begin{aligned} L(\sigma_k) &= L(\bar{\sigma}_k) & y & & \bar{\alpha}_l &\leq \alpha_l \\ L(\tau_{l,k}) &= L(\bar{\tau}_{l,k}) & & & \bar{\beta}_{l+k} &\leq \beta_{l+k}, \\ L(\sigma_{l+k}) &= L(\bar{\sigma}_{l+k}) & & & & \end{aligned}$$

donde $\angle(-\dot{\sigma}_l(L(\sigma_l)), \dot{\tau}_{l,k}(l_2/N))$ y $\beta_{l+k} = \angle(-\dot{\sigma}_{l+k}(L(\sigma_{l+k})), -\dot{\tau}_{l,k}((l+k)l_2/N))$.



Nótese que $\beta_{k+l} + \alpha_{k+l} = \pi$. Ahora se extiende $\bar{\tau}_{l,k}$ agregando un segmento $\bar{\tau}_{l+k,1}$ de longitud $L(\tau_{k+l,1})$. Argumentando de manera totalmente análoga a como se probó la Parte 7, pero con lo dicho antes a esta afirmación, se prueba que

$$d_g(\sigma_l(0), \tau_{l,k+1}((k+l+1)l_2/N)) \leq d_{H-\varepsilon}(\bar{\sigma}_l(0), \bar{\tau}_{l,k+1}((k+l+1)l_2/N))$$

con la bisagra $(\sigma_l, \tau_{l,k}, \alpha_l)$, i.e., lo que se quería demostrar. Q. E. D.

PARTE 9. (B) y (A) son válidos en $M^{H-\varepsilon}$.

DEMOSTRACIÓN. (B) se satisface por inducción, la base de inducción se tiene por lo descrito antes de la Parte 8 y el paso inductivo por la Parte 8. (A) se cumple por las Partes 3 y 4. Q. E. D.

Por lo tanto, se tiene el teorema de Toponogov para cuando $H \leq 0$. Falta el caso $H > 0$.

PARTE 10. Si $H > 0$, (B) y (A) se tienen en M^H .

DEMOSTRACIÓN. Como se tiene (B) para $M^{H-\varepsilon}$, se sabe que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1^\varepsilon(0), \bar{\gamma}_2^\varepsilon(l_2)) \geq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)),$$

donde $\bar{\gamma}_1^\varepsilon, \bar{\gamma}_2^\varepsilon \subset M^{H-\varepsilon}$ y forman un ángulo α_3 . La función de la izquierda es continua con respecto a ε , así que haciendo tender ε a cero se tiene

$$d_{H-\varepsilon}(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d_g(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Con un argumento similar se muestra (A) con las Partes 3 y 2. Q. E. D.

OBSERVACIÓN. Si en (A) se pide también que γ_2 sea minimizante, entonces se tiene un triángulo de comparación $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ en M^H tal que $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$ y $\bar{\alpha}_i \leq \alpha_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Esto en virtud de las Partes 2, 3 y 9, además de los argumentos de convergencia en la Parte 10.

Puntos críticos de funciones distancia

A lo largo de este capítulo se considerará una n -variedad riemanniana (M, g) que es completa y conexa, y $A \subset M$ cerrado.

DEFINICIÓN. Considérese la función distancia a A :

$$\begin{aligned} \text{dist}_A : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto d_g(A, p), \end{aligned}$$

donde d_g denota la distancia riemanniana de (M, g) .

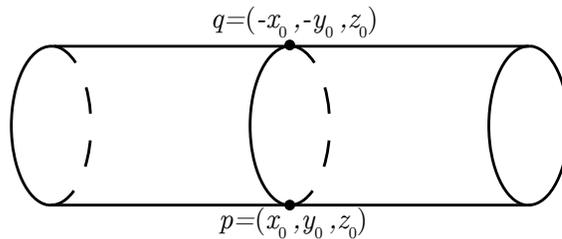
Un punto $q \in M$ se dice que es *punto crítico para dist_A* ó *punto crítico para A* si para cualquier vector $v \in T_q M$ hay una geodésica minimizante de $c: [0, 1] \rightarrow M$ de q a A tal que

$$g(v, \dot{c}(0)) \geq 0.$$

Un punto $r \in M$ se dice que es *punto regular para dist_A* ó *punto regular para A* si existe un vector $w \in T_r M$ tal que para cualquier geodésica minimizante $c: [0, 1] \rightarrow M$ de q a A se tiene que

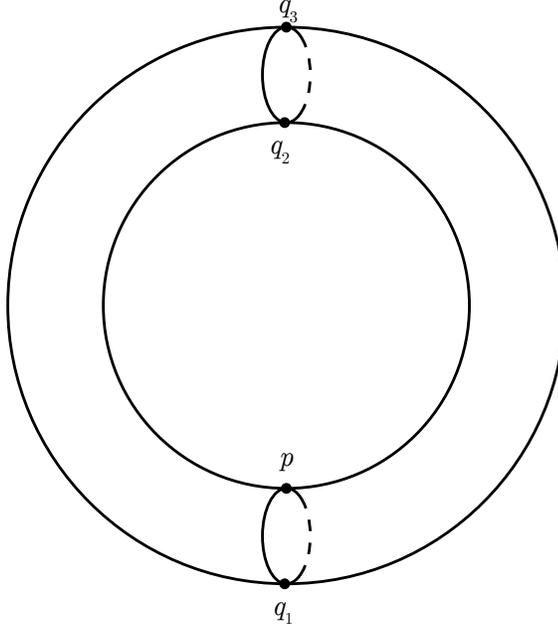
$$g(w, \dot{c}(0)) < 0.$$

EJEMPLO. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.



q y p son los puntos críticos de p .

EJEMPLO. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



q_1 , q_2 , q_3 y p son los puntos críticos de p .

LEMA 2.1. *Para cualquier punto regular $q \in M$ de dist_A hay un campo vectorial X en alguna vecindad U de q tal que*

$$(4) \quad g(X_{\tilde{q}}, \dot{c}(0)) < 0$$

para cualquier $\tilde{q} \in U$ y cualquier geodésica minimizante de \tilde{q} a A .

DEMOSTRACIÓN. Como q es regular para A , existe un vector unitario $X_q \in T_q M$ tal que

$$g(X_q, \dot{c}(0)) \geq 0$$

para cualquier geodésica c de q a A . Ahora se extiende X_q a un campo vectorial suave arbitrario X en alguna vecindad abierta de q . Este campo vectorial satisface la condición (4) en alguna vecindad abierta suficientemente pequeña pues de lo contrario se puede dar una sucesión $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos en M que convergen a q y una sucesión $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de geodésicas de q_i a A que satisfacen

$$g(X_{q_i}, \dot{c}_i(0)) \geq 0.$$

Una geodésica límite c de $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sería una geodésica minimizante de q a A tal que

$$g(X_q, \dot{c}) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción.

Q. E. D.

DEFINICIÓN. Un campo vectorial unitario X en una vecindad U que satisface (4) se llama *campo vectorial tipo gradiente para dist_A* .

El lema anterior muestra la existencia local de los campos vectoriales tipo gradiente para dist_A alrededor de puntos regulares.

COROLARIO 2.2 (Existencia de campos vectoriales tipo gradiente globales). *Bajo las mismas condiciones del lema anterior se tiene que*

- (a) *El conjunto de puntos regulares para A es abierto.*
- (b) *En el conjunto abierto U de puntos regulares existe un campo vectorial tipo gradiente para dist_A .*

DEMOSTRACIÓN. El inciso (a) se sigue inmediatamente del lema anterior.

Para el inciso (b), se pueden pegar los campos vectoriales locales tipo gradiente para dist_A dados por el lema anterior usando una partición de la unidad. Así, se obtiene un campo \tilde{X} en U que satisface (4). Esto último se tiene de la finitud local de la partición de la unidad y de la observación: si v_1, \dots, v_m son vectores unitarios en un espacio vectorial euclidiano que satisfacen que $\langle v_i, w \rangle < 0$ para toda i , entonces cualquier combinación lineal convexa

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i,$$

con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, también satisface $\langle v, w \rangle < 0$. Finalmente, tómesese

$$X = \frac{\tilde{X}}{\|\tilde{X}\|_g}. \quad \text{Q. E. D.}$$

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $U \subset M$ abierto y X un campo vectorial tipo gradiente para dist_A en U . Sea Φ el flujo de $-X$ y Ψ el flujo de X . Entonces*

- (a) *dist_A es estrictamente decreciente a lo largo de cualquier curva integral de $-X$.*
- (b) *En cualquier subconjunto compacto C de U la razón de decrecimiento está controlada por una constante de Lipschitz, i. e., hay una constante $\theta > 0$ tal que*

$$(5) \quad \text{dist}_A(\Phi(q, t_0 + \tau)) \leq \text{dist}_A(\Phi(q, t_0)) - \tau\theta$$

mientras $\Phi(q, t_0 + \sigma) \in C$ para $0 \leq \sigma \leq \tau$. Equivalentemente se tiene

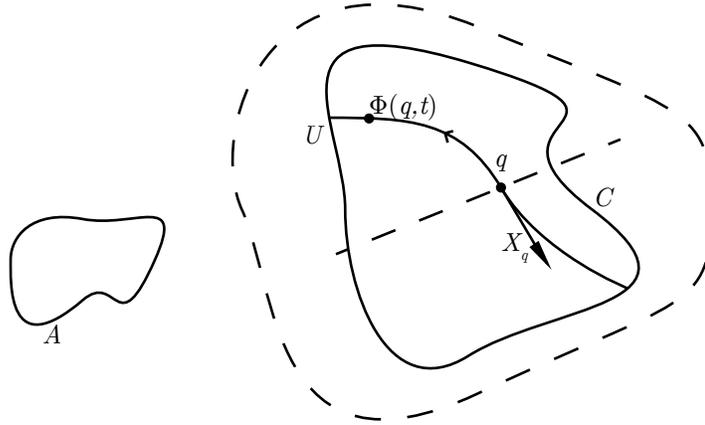
$$(6) \quad \text{dist}_A(\Psi(q, t'_0 + \tau)) \geq \text{dist}_A(\Psi(q, t'_0)) + \tau\theta$$

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que es suficiente probar (b) pues este implica (a).

Nótese ahora que X satisface la desigualdad

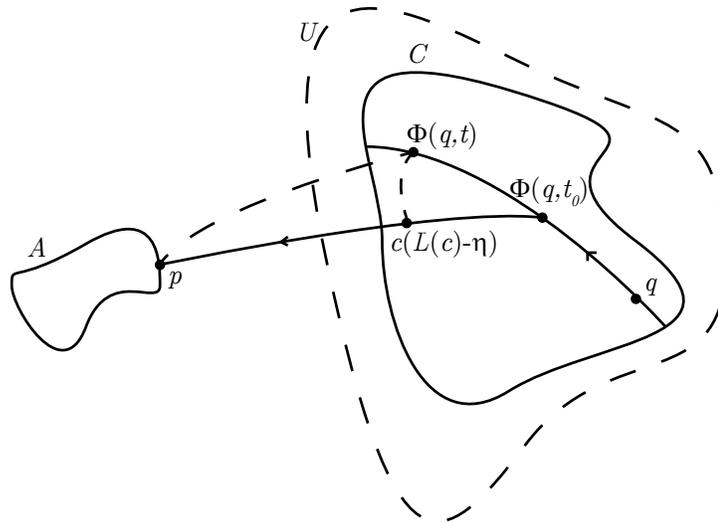
$$g(-X_q, \dot{c}(0)) \geq \theta$$

para algún $\theta > 0$, para cualquier $q \in C$ y cualquier geodésica minimizante c de q a A . Si esto no fuera cierto, habría una sucesión $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos en C y geodésicas minimizantes c_i de q_i a A tal que $g(X_{q_i}, \dot{c}_i(0)) \geq 0$. Por compacidad se tendría una subsucesión convergente que se denotará igual, $q_i \rightarrow q \in C$, y una geodésica límite c de q a A tal que $g(X_q, \dot{c}(0)) \geq 0$, lo cual contradice que q es regular.



Considérese la función $h(t) := \text{dist}_A(\Phi(q, t))$. A partir de ésta se va a construir \tilde{h} como sigue. Sea $p \in A$ tal que $d_g(p, \Phi(q, t_0)) = \text{dist}_A(\Phi(q, t_0))$, con $q \in C$ y t_0 de manera que $\Phi(q, t_0) \in C$. Sea c geodésica minimizante unitaria, i.e., parametrizada por longitud de arco, de $\Phi(q, t_0)$ a p . Sea $\eta \in (0, L(c))$ fijo y sea

$$\tilde{h}(t) := \eta + d_g(c(L(c) - \eta), \Phi(q, t)).$$



Esta función satisface

- \tilde{h} es diferenciable en una vecindad de t_0 si η es lo suficientemente grande de manera que $\Phi(q, t_0)$ pertenezca a una vecindad normal de $c(L(c) - \eta)$.

- $\tilde{h}(t) \stackrel{(*)}{\geq} d_g(p, \Phi(q, t)) \stackrel{(**)}{\geq} \text{dist}_A(\Phi(q, t)) = h(t)$. (*) se cumple por la desigualdad del triángulo y (**) por definición.
- $\tilde{h}(t_0) = L(c) = d_g(p, \Phi(q, t_0)) = h(t_0)$.

Usando las coordenadas normales mencionadas antes, se calcula la derivada de \tilde{h} en t_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{h}'(t_0) &= g(\text{grad dist}_{c(L(c)-\eta)}(\Phi(q, t_0)), -X(\Phi(q, t_0))) \\ &= g(-\dot{c}(0), -X(\Phi(q, t_0))) \\ &\leq -\theta \end{aligned}$$

Así, \tilde{h} es decreciente cerca de t_0 y como $\tilde{h}(t) \geq h(t)$:

$$\frac{h(t_0 + \tau) - h(t_0)}{\tau} \leq \frac{\tilde{h}(t_0 + \tau) - \tilde{h}(t_0)}{\tau}.$$

Esto implica que

$$\frac{h(t_0 + \tau) - h(t_0)}{\tau} \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tilde{h}(t_0 + \tau) - \tilde{h}(t_0)}{\tau} = \tilde{h}'(t_0) \leq -\theta.$$

Luego

$$h(t_0 + \tau) \leq h(t_0) - \tau\theta.$$

Es decir, la condición (5) se cumple en una vecindad de t_0 . Sin embargo esta construcción es válida para cualquier t_0 tal que $\Phi(q, t) \in C$ en una vecindad de t_0 contenida en C . La otra condición es análoga. Q. E. D.

Una generalización del teorema de la esfera

Finalmente en este capítulo se procederá con la demostración del teorema principal. Además del teorema de Toponogov, en la demostración se usan dos resultados: el lema de Berger y la ley de cosenos para la esfera.

LEMA 3.1 (Berger). *Sea M una variedad riemanniana compacta y sean $p, q \in M$ tal que $d(p, q) = \text{diam}(M)$. Entonces para todo $W \in T_p M$ existe una geodésica minimizante γ de $p = \gamma(0)$ a q tal que $g(\dot{\gamma}(0), W) \geq 0$.*

PROPOSICIÓN 3.2 (Ley de Cosenos). *Sea un triángulo geodésico en S^n cuyos lados miden a, b y c . Si α denota el ángulo opuesto al lado a , entonces*

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \text{sen}(b) \text{sen}(c) \cos(\alpha).$$

La demostración del lema de Berger se puede consultar en [Carmo]. Por otro lado la demostración de la ley de cosenos se puede consultar en [Petersen].

A partir de ahora siempre se considerará una n -variedad riemanniana M completa y conexa cuya curvatura seccional K satisface

$$0 < \delta \leq K \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Además se tomarán $p, q \in M$ tal que $d_g(p, q) = \text{diam}(M)$. Estos existen pues M es compacta.

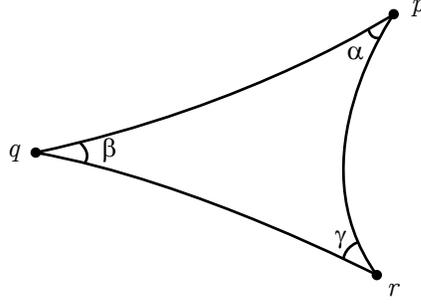
LEMA 3.3. *q está determinado de manera única por p y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que existe $r \in M$ tal que $d_g(q, r) = \text{diam}(M)$. Usando la completez de M se toma una geodésica minimizante c_1 que une a p con r . Por el lema de Berger, existe una geodésica minimizante c que une p con q tal que

$$\alpha = \angle(\dot{c}(0), \dot{c}_1(0)) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, considérese \bar{c} una geodésica minimizante de q a r .

Así, se tiene el triángulo geodésico Δpqr . Sea β el ángulo en q y γ el ángulo en r .



Tómese el triángulo de comparación en $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{\delta})$ dado por el teorema de Toponogov. Este triángulo $\triangle p^*q^*r^*$, cuyos lados son c^* , \bar{c}^* y c_1^* , y cuyos ángulos α^* , β^* y γ^* , satisface que

$$\begin{aligned} L(c) &= L(c^*) & y & & \alpha^* &\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ L(c_1) &= L(c_1^*) & & & \beta^* &\leq \beta \\ L(\bar{c}) &= L(\bar{c}^*) & & & \gamma^* &\leq \gamma. \end{aligned}$$

Usando la ley de cosenos en este último triángulo y que $\alpha^* \leq \pi/2$:

$$\cos(\sqrt{\delta}L(\bar{c})) = \cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \cos(\sqrt{\delta}L(c)) + \text{sen}(\sqrt{\delta}L(c_1)) \text{sen}(\sqrt{\delta}L(c)) \cos(\alpha^*)$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{sen}(\sqrt{\delta}L(c_1)) \text{sen}(\sqrt{\delta}L(c)) \cos(\alpha^*) \\ &= \cos(\sqrt{\delta}L(\bar{c})) - \cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \cos(\sqrt{\delta}L(c)) \\ &= \cos(\sqrt{\delta} \text{diam}(M))(1 - \cos(\sqrt{\delta}L(c_1))) \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$1 - \cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \leq 0.$$

Esta desigualdad se da solamente si $\sqrt{\delta}L(c_1) = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $p = r$. Q. E. D.

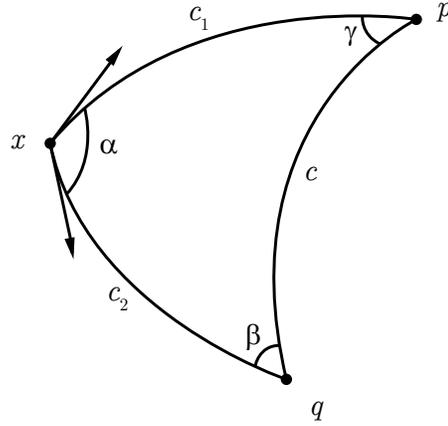
LEMA 3.4. *Sea $x \in M \setminus \{p, q\}$ y sean c_1 y c_2 geodésicas minimizantes de x a p y q , respectivamente. Entonces*

$$\angle(\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0)) > \frac{\pi}{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Supóngase por contradicción que $\alpha := \angle(\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0)) \leq \pi/2$. Usando el lema de Berger, existe una geodésica minimizante c que une a q con p tal que

$$\beta := \angle(\dot{c}(0), -\dot{c}_2(L(c_2))) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sea γ el ángulo en p . Así, se tiene un triángulo geodésico con lados c_1 , c_2 y c , y ángulos α , β y γ .



Aplicando el teorema de Toponogov se tiene un triángulo de comparación en $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{\delta})$ con lados c_1^* , c_2^* y c^* , y ángulos α^* , β^* y γ^* tal que

$$\begin{aligned} L(c) &= L(c^*) & y & & \alpha^* &\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ L(c_1) &= L(c_1^*) & & & \beta^* &\leq \beta \\ L(c_2) &= L(c_2^*) & & & \gamma^* &\leq \gamma. \end{aligned}$$

Ahora se usa la ley de cosenos en $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{\delta})$:

$$\cos(\sqrt{\delta}L(c)) = \cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \cos(\sqrt{\delta}L(c_2)) + \sin(\sqrt{\delta}L(c_1)) \sin(\sqrt{\delta}L(c_2)) \cos(\alpha^*).$$

El último sumando es mayor ó igual a cero pues $\alpha^* \leq \pi/2$. Luego

$$0 > \cos(\sqrt{\delta} \text{diam}(M)) \geq \cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \cos(\sqrt{\delta}L(c_2)).$$

De esto, $\cos(\sqrt{\delta}L(c_1))$ y $\cos(\sqrt{\delta}L(c_2))$ tienen signos distintos. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \in (0, 1)$. Entonces

$$\cos(\sqrt{\delta}L(c_1)) \cos(\sqrt{\delta}L(c_2)) > \cos(\sqrt{\delta}L(c_2)).$$

Lo que implica que

$$\cos(\sqrt{\delta} \text{diam}(M)) > \cos(\sqrt{\delta}L(c_2))$$

y esto a su vez que

$$\text{diam}(M) < L(c_2),$$

lo cual es una contradicción a la definición de diámetro. Por lo tanto, $\alpha \geq \alpha^* > \pi/2$. Q. E. D.

TEOREMA GENERALIZADO DE LA ESFERA. *Sea (M, g) una n -variedad riemanniana completa y conexa, cuya curvatura seccional K es tal que*

$$0 < \delta \leq K$$

y

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \text{diam}(M).$$

Entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

DEMOSTRACIÓN. Sean $p, q \in M$ tal que $d_g(p, q) = \text{diam}(M)$. Por lema de Berger, Lema 3.1, q es punto crítico de dist_p . Por el Lema 3.3, q es el único punto crítico de dist_p en $M \setminus \{p\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera que

$$\exp_p : B(0, \varepsilon) \rightarrow B_g(p, \varepsilon)$$

y

$$\exp_q : B(0, \varepsilon) \rightarrow B_g(q, \varepsilon)$$

sean difeomorfismos.

En $B_g(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$ considérese el campo vectorial gradiente de la función dist_p

$$X_1 = \text{grad} \left(\text{dist}_p|_{B_g(p, \varepsilon) \setminus \{p\}} \right).$$

Este campo satisface (4) en $B_g(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$ por como son las geodésicas que salen de p . Para ver esto tómesese un punto $r \in B_g(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$ y una geodésica c que lo una con p , así se tiene

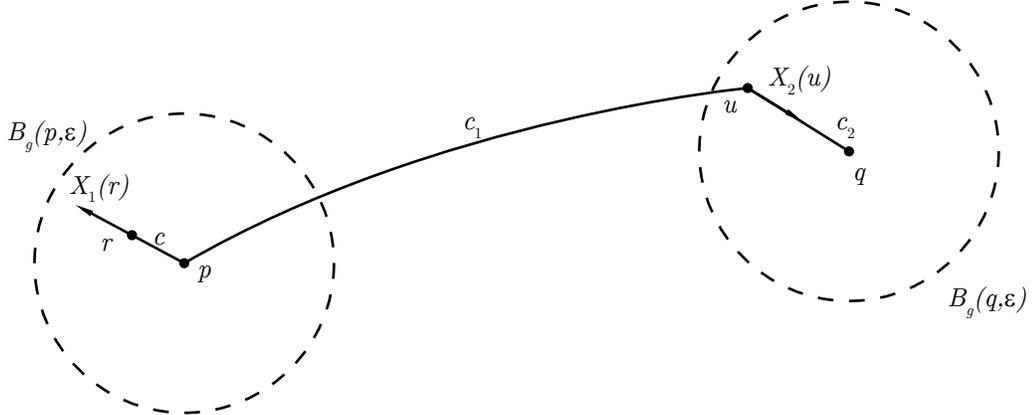
$$g(X_1(r), \dot{c}(0)) = g(X_1(r), -X_1(r)) = -g(X_1(r), X_1(r)) < 0.$$

En $B_g(q, \varepsilon) \setminus \{q\}$ se considera el campo vectorial

$$X_2 = -\text{grad} \left(\text{dist}_q|_{B_g(q, \varepsilon) \setminus \{q\}} \right).$$

Este campo también cumple (4) en $B_g(q, \varepsilon) \setminus \{q\}$, tómesese un punto u en ese conjunto y una geodésica c_1 que lo una con p y una geodésica c_2 que lo una con q . Entonces usando el Lema 3.4 se tiene que

$$0 > g(\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0)) = g(\dot{c}_1(0), X_2(u)).$$



Ahora bien, haciendo uso del Corolario 2.2 y particiones de la unidad, se puede construir un campo vectorial X tipo gradiente en $M \setminus \{p, q\}$ tal que coincide con X_1 en $B_g(p, \varepsilon/2) \setminus \{p\}$ y coincide con X_2 en $B_g(q, \varepsilon/2) \setminus \{q\}$. Por la Proposición 2.3, la distancia a p aumenta a lo largo de las curvas integrales determinadas por el campo X . Más aún, las curvas integrales tienen longitud

finita y se pueden extender continuamente a p y q . Además cada $x \in M \setminus \{p, q\}$ tiene una única curva integral $\varphi_x(t)$ del campo X que pasa por x al tiempo $t = 0$.

Supóngase que el punto v varía sobre $\partial B_g(p, \varepsilon/2)$ que es difeomorfa a \mathbb{S}^{n-1} . Después de cierto tiempo t_v la curva integral φ_v llega a $\partial B_g(q, \varepsilon/2)$. La función

$$v \mapsto t_v$$

es suave porque el campo vectorial X es suave en $M \setminus \{p, q\}$.

Dicho lo anterior, se tiene un difeomorfismo definido como sigue:

$$\begin{aligned} \partial B_g(p, \varepsilon/2) \times [0, 1] &\longrightarrow M \setminus (B_g(p, \varepsilon/2) \cup B_g(q, \varepsilon/2)) \\ (x, t) &\longmapsto \varphi_x(t \cdot t_x). \end{aligned}$$

Pegando esta aplicación con dos discos $B_g(p, \varepsilon/2)$ y $B_g(q, \varepsilon/2)$ se tiene el homeomorfismo buscado, lo cual demuestra el teorema. Q. E. D.

Comentarios finales

Como ya se mencionó en la introducción de este trabajo, se han construido varias generalizaciones del teorema de la esfera en varias direcciones. Se expondrán varias de ellas y se mencionará donde se puede encontrar su demostración.

1. Puntos críticos

El objetivo de la teoría de puntos críticos de funciones distancia, teoría que se introdujo de manera muy básica y parcial en este trabajo, es obtener una relación entre la topología y la geometría de una variedad riemanniana vía su estructura de espacio métrico. La forma de establecer este vínculo es tratar de emular con funciones distancia a la teoría de Morse, que como es sabido con ella se puede estudiar la estructura topológica de una variedad diferenciable. El problema de las funciones distancia es la pérdida de diferenciabilidad, sin embargo ciertas propiedades básicas siguen siendo válidas para estas funciones.

Con esta teoría se puede probar la siguiente generalización del TGE que se debe a Karsten Grove y cuya demostración se puede consultar en [Grove].

TEOREMA 3.5. *Sea M una n -variedad riemanniana compacta y sin frontera. Si existe un punto $p \in M$ tal que dist_p tiene solamente un punto crítico distinto de p , entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^n .*

Nótese que precisamente el TGE puede verse como corolario de este teorema porque a través de las hipótesis sobre la curvatura y sobre el diámetro se obtiene que:

- (a) Usando el teorema de Bonnet, la variedad M es compacta.
- (b) Con los Lemas 3.3 y 3.4, si $p, q \in M$ son tales que $d_g(p, q) = \text{diam}(M)$, la función dist_p tiene un sólo punto crítico distinto a p que es q .

Por lo tanto, se puede aplicar este teorema para obtener la conclusión del TGE. La demostración del teorema de Grove es muy interesante porque usa la versión para funciones distancia de la teoría clásica de Lusternik-Schnirelman.

2. Subvariedades

Ahora se presenta un teorema de la esfera que, aunque no es precisamente una generalización del teorema clásico de la esfera, extiende el resultado a una nueva clase de variedades riemannianas desde el punto de vista de teoría de subvariedades. Este teorema se debe a Katsuhiko Shiohama y Hongwei Xu y su demostración se puede consultar en [Shiohama-Xu].

TEOREMA 3.6. *Sea M una n -subvariedad orientada y completa de $F^{n+p}(c)$ con $c \geq 0$, donde $F^{n+p}(c)$ es la variedad riemanniana simplemente conexa y completa de dimensión $n+p$ y curvatura*

seccional c . Si $n \neq 3$ y si

$$\Lambda(M) := \sup_M (S - \alpha(n, H, c)) < 0,$$

donde

$$\alpha(n, H, c) := nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)cH^2},$$

$n \geq 2$, H es la curvatura media de M y S es la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de M . Entonces M es homeomorfa a una esfera. Más aún, M es difeomorfa a una esfera si $n = 3$.

Por la aparente diferencia del enunciado de este resultado con los demás expuestos aquí, vale la pena comentar que la hipótesis sobre el número $\Lambda(M)$ es una condición sobre la curvatura y la importancia del por qué se define de esa manera se nota en la demostración del teorema. Primero porque permite acotar la curvatura de Ricci por debajo por 0 y de ahí se concluye con el teorema de Myers que M es compacta y tiene grupo fundamental $\Pi_1(M)$ finito. Por otra parte, permite calcular los grupos de homología de M para después, mediante el uso de resultados de topología algebraica como el teorema de Hurewicz y el teorema de Whitehead, determinar que M tiene el mismo tipo de homotopía de \mathbb{S}^n y finalmente, con la solución de la conjetura de Poincaré, concluir que M es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

3. Espacios de Alexandrov

Los espacios de Alexandrov forman una clase de espacios métricos que tienen dos propiedades importantes con relación a la geometría riemanniana. La primera es que aparecen de manera natural en la frontera del espacio de todas las variedades riemannianas con curvatura acotada por debajo y la segunda es que comparten muchas propiedades con las variedades riemannianas. Así, este último resultado es un teorema de la esfera para espacios métricos que generalizan de cierta manera a las variedades riemannianas.

Este resultado fue desarrollado por Karsten Grove y Peter Petersen, y su demostración puede ser consultada en [**Grove-Petersen 2**].

TEOREMA 3.7. *Sea X un espacio de Alexandrov n -dimensional con curvatura mayor o igual a 1 y radio mayor a $\pi/2$, entonces X es homeomorfo a \mathbb{S}^n .*

Unos resultados de comparación

En este apéndice se expondrán el teorema de comparación de Rauch y un teorema de Berger, así como un par de corolarios de ellos. Estos resultados permiten, a partir de la comparación de la curvatura seccional de dos variedades, obtener un cotejo de las longitudes de curvas en dichas variedades. Estos resultados no se demostrarán pero sus pruebas pueden ser encontradas en [Cheeger-Ebin] o en [Carmo].

TEOREMA A.1 (Rauch). Sean M una n -variedad riemanniana y \tilde{M} una $(n+k)$ -variedad riemanniana con $k \geq 0$. Sean $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ y $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ geodésicas unitarias. Y sean J y \tilde{J} campos de Jacobi a lo largo de γ y $\tilde{\gamma}$, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} J(0) &= \tilde{J}(0) = 0, \\ g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0)) &= \tilde{g}(D_t \tilde{J}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0)), \\ |D_t J(0)|_g &= |D_t \tilde{J}(0)|_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Supóngase que $\tilde{\gamma}$ no contiene puntos conjugados en $(0, a]$ y que, para todo t , para todo $x \in T_{\gamma(t)}M$ y $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$, se tiene

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)) \geq K(x, \dot{\gamma}(t)),$$

donde $K(x, y)$ denota la curvatura seccional con respecto al plano generado por x y y . Entonces

$$|\tilde{J}|_{\tilde{g}} \leq |J|_g.$$

Además, si para algún $t_0 \in (0, a]$, se tiene que $|\tilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, entonces

$$\tilde{K}(\tilde{J}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)) = K(J(t), \dot{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [0, t_0].$$

COROLARIO A.2. Sean M y \tilde{M} n -variedades riemannianas. Supóngase que para todo $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\sigma \subset T_p M$, $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$, se tiene que

$$\tilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}) \leq K_p(\sigma).$$

Sean $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y una isometría lineal fija $i: T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow T_p M$. Sea $r > 0$ tal que las restricciones $\exp_{\tilde{p}}|_{\tilde{B}_e(r, 0)}$ y $\exp_p|_{B_e(r, 0)}$ sean aplicaciones difeomorfas. Sea $\tilde{c}: [0, a] \rightarrow \exp_{\tilde{p}}(\tilde{B}_e(r, 0)) \subset \tilde{M}$ una curva diferenciable y se define la curva diferenciable $c: [0, a] \rightarrow \exp_p(B_e(r, 0)) \subset M$ como

$$c(s) = \exp_p \circ i \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}(\tilde{c}(s)), \quad s \in [0, a].$$

Entonces $L(\tilde{c}) \geq L(c)$.

Para enunciar el segundo teorema conviene introducir las siguientes nociones.

DEFINICIÓN. Sea S una subvariedad de la variedad riemanniana M . Se dice q es un punto focal de S si es valor crítico de $\exp_p|_{N_p S}$ para algún $p \in S$, donde $N_p S$ denota el complemento ortogonal de $T_p S$ en $T_p M$.

DEFINICIÓN. Sea M variedad riemanniana. Sean $p \in M$ y $x \in T_p M$ fijos. Considérese el conjunto

$$x^\perp = \{y \in T_p M \mid g(x, y) = 0\}.$$

Como $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo local alrededor de 0, existe una vecindad U del cero en x^\perp tal que $\exp_p|_U$ es un encaje. A la subvariedad $N = \exp_p(U)$ se le llama *subvariedad geodésica* definida por x .

TEOREMA A.3 (Berger). Sean M una n -variedad riemanniana y \tilde{M} una $(n+k)$ -variedad riemanniana con $k \geq 0$. Sean $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ y $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ geodésicas unitarias. Supóngase que para todo t , para todo $x \in T_{\gamma(t)} M$ y $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M}$, se tiene

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)) \geq K(x, \dot{\gamma}(t)).$$

Además supóngase que para ningún $t \in (0, a]$ el punto $\tilde{\gamma}(t)$ es punto focal de la subvariedad geodésica \tilde{S} definida por $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$. Sean J y \tilde{J} campos de Jacobi a lo largo de γ y $\tilde{\gamma}$, respectivamente, tal que

$$|J(0)|_g = |\tilde{J}(0)|_{\tilde{g}}, \quad g(J(0), \dot{\gamma}(0)) = \tilde{g}(\tilde{J}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0)) \quad \text{y} \quad |D_t J(0)|_g = |D_t \tilde{J}(0)|_{\tilde{g}}.$$

Entonces $|J(t)|_g \geq |\tilde{J}(t)|_{\tilde{g}}$.

COROLARIO A.4. Sean M una n -variedad riemanniana y \tilde{M} una $(n+k)$ -variedad riemanniana con $k \geq 0$. Sean $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ y $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ geodésicas unitarias. Sean E y \tilde{E} campos vectoriales unitarios paralelos a lo largo de γ y $\tilde{\gamma}$ tales que son perpendiculares siempre a $\dot{\gamma}$ y $\dot{\tilde{\gamma}}$, respectivamente. Sea $c: [0, a] \rightarrow M$ curva suave definida por

$$c(t) = \exp_{\gamma(t)}(f(t) E(t)),$$

donde $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, y sea $\tilde{c}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ definida por

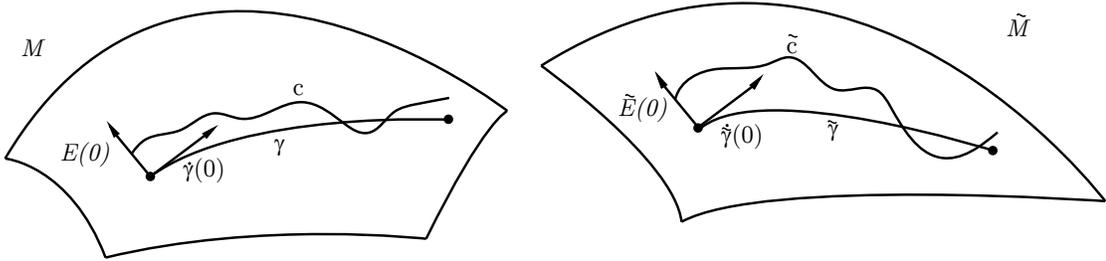
$$\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{\gamma}(t)}(f(t) \tilde{E}(t)).$$

Supóngase que $\tilde{K} \geq K$ y supóngase que para cada t la geodésica $\tilde{\eta}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ definida por

$$\tilde{\eta}(s) = \exp_{\tilde{\gamma}(t)}(s f(t) \tilde{E}(t))$$

no contiene puntos focales de la subvariedad geodésica definida por $\dot{\tilde{\eta}}(0)$. Entonces

$$L(c) \geq L(\tilde{c}).$$



Bibliografía

- [Berger] Marcel Berger. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [Berger 2] Marcel Berger. Les variétés Riemanniennes $\frac{1}{4}$ -pincées. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche*, Serie III, Vol. 14, pp. 161-170, 1960.
- [Carmo] Manfredo do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [Cheeger-Ebin] Jeff Cheeger y David Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [Cheeger-Gromov-Okonek-Pansu] Jeff Cheeger, Mikhail Gromov, Christian Okonek y Pierre Pansu. *Geometric Topology: Recent Developments*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Clapp] Mónica Clapp. *Análisis Matemático*. Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Colección Papirhos: Serie Textos, México, 2015.
- [Clapp 2] Mónica Clapp. *Geometría Riemanniana*. Notas del curso, Ciudad de México, 2014.
- [Freedman] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 17, pp. 357-453, 1982.
- [Gromoll-Klingenberg-Meyer] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg y Wolfgang Meyer. *Riemannsche Geometrie im Großen*. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [Grove] Karsten Grove. Critical Point Theory for Distance Functions. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 54, Pte. 3, pp. 357-385, 1993.
- [Grove 2] Karsten Grove. Ramifications of the Classical Sphere Theorem. *Actes de la table ronde de Géométrie Différentielle en l'honneur de Marcel Berger*, Séminaires et Congrès 1, 1996.
- [Grove-Petersen] Karsten Grove y Peter Petersen. *Comparison Geometry*. Cambridge University Press, New York, 1997.
- [Grove-Petersen 2] Karsten Grove y Peter Petersen. A Radius Sphere Theorem. *Inventiones mathematicae*, Vol. 112, pp. 577-583, 1993.
- [Grove-Shiohama] Karsten Grove y Katsuhiko Shiohama. A Generalized Sphere Theorem. *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 106, No. 1, pp. 201-211, 1977.
- [Klingenberg] Wilhelm Klingenberg. Contributions to Riemannian Geometry in the Large. *Annals of Mathematics*, Serie II, Vol. 69, No. 3, pp. 654-666, 1959.
- [Klingenberg 2] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 35, Issue 1, pp. 47-54, 1961.
- [Lee] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition. Springer, New York, 2013.
- [Lee 2] John M. Lee. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer, New York, 1997.
- [Meyer] Wolfgang Meyer. *Toponogov's Theorem and Applications*. Lecture Notes, Trieste, 1989.
- [Petersen] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*, Third Edition. Springer, New York, 2016.
- [Rauch] Harry Rauch. A contribution to differential geometry in the large. *Annals of Mathematics*, Serie II, Vol. 54, No. 1, pp. 38-55, 1951.

- [Shiohama] Katsuhiko Shiohama. The diameter of δ -pinched manifolds. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 5, pp. 61-74, 1971.
- [Shiohama-Xu] Katsuhiko Shiohama y Hongwei Xu. The topological sphere theorem for complete submanifolds. *Compositio Mathematica*, Vol. 107, pp. 221-232, 1997.
- [Sjerve] Denis Sjerve. Homology spheres which are covered by spheres. *Journal of the London Mathematical Society*, Second Series, Vol. 6, pp. 333-336, 1973.
- [Smale] Stephen Smale. Generalized Poincaré's Conjecture in Dimensions Greater Than Four. *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 54, No. 2, pp. 391-406, 1961.
- [Toponogov] Victor Andreevich Toponogov. Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, *American Mathematical Society Tranlations*, Series 2, Vol. 37, pp. 291-336, 1964.
- [Tsukamoto] Yōtarō Tsukamoto. On Riemannian manifolds with positive curvature. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Serie A, Vol. 15, No. 2, 1961.