UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Inmersiones Isométricas de Hipersuperficies en $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

PRESENTA:
OMAR CORONA TEJEDA

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN:
FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

LUGAR, MES Y AÑO EN QUE SE REALIZÓ EL REGISTRO
CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO, 2017

Inmersiones isométricas de hipersuperficies en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Omar Corona Tejeda

5 de agosto de 2017

Introducción

Uno de los problemas clásicos de la geometría riemanniana consiste en estudiar las subvariedades de un espacio ambiente dado, este problema puede ser reformulado en términos de inmersiones.

El problema recíproco resulta sumamente interesante, es decir, ¿cuándo una variedad admite una inmersión (isométrica) en un espacio determinado? Un ejemplo de la importancia de la existencia de inmersiones es el siguiente teorema: (Véase [DC13])

Teorema 0.1 *Sea M^n, $n \geq 2$, una variedad riemanniana conexa, compacta y orientable, si existe una inmersión $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ con curvaturas principales distintas de cero en cada punto de M^n entonces M^n es difeomorfa a $\mathbb{S}^n$.*

Las condiciones para la existencia de inmersiones isométricas de una variedad de dimensión n en una *forma espacial* de dimensión $n+1$ se ha estudiado en textos clásicos como [dC16] o en el artículo de [Ten71]. Se muestra que las ecuaciones de *Gauss* y *Codazzi* son condiciones suficientes y necesarias para la existencia de tal inmersión al espacio ambiente que resulta ser única salvo isometrías globales.

En espacios más complicados dichas ecuaciones no constituyen una condición suficiente, como se demuestra en [Dan09]. En esta tesina se expondrán las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de inmersiones isométricas en los espacios $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ (véase (4.1)).

La tesina está presentada de la siguiente forma: en la sección 1 se hace un recordatorio del tensor de curvatura, el operador de forma y las ecuaciones de Gauss y Codazzi para espacios con curvatura seccional constante. En la 2 se usa el material de marcos móviles para establecer ecuaciones entre el operador de forma y el tensor de curvatura que resultan fundamentales para la prueba del teorema. En la sección 3 se recuerdan algunos resultados útiles de la teoría de hipersuperficies para los espacios $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Por último, en la sección 4 se prueba el teorema que asegura la existencia de inmersiones isométricas en los espacios mencionados bajo ciertas condiciones.

1. Algunos hechos de Geometría Riemanniana

Consideremos $\overline{M}$ una variedad riemanniana orientable de dimensión $n+1$ y M una subvariedad de $\overline{M}$ de dimensión n, también orientable y orientada mediante un campo vectorial unitario N normal a M en cada punto de M. Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ las conexiones de M y $\overline{M}$ respectivamente y R y $\overline{R}$ los tensores de curvatura riemanniana i.e. para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ tenemos

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1}$$

Sea S el operador de forma de M en $\overline{M}$ dado por $S(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T$ para $X \in \mathscr{X}(M)$, esto es, el cambio del vector normal en la dirección de X.

Entonces las siguientes ecuaciones son ciertas:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle - \langle SY, Z\rangle\langle SX, W\rangle \tag{2}$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = \overline{R}(X,Y)N \tag{3}$$

estas son las *ecuaciones de Gauss y Codazzi* respectivamente.

Si $\overline{M}$ es una forma espacial, i.e. un espacio de curvatura seccional constante, como la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ o el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, entonces las ecuaciones anteriores se transforman en lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W\rangle - &\kappa(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle) \\ &= \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle - \langle SY, Z\rangle\langle SX, W\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = 0 \tag{5}$$

en estas ecuaciones κ representa la curvatura seccional de M i.e. $\kappa = 1, 0, -1$ para $\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{H}^{n+1}$ respectivamente.

Bajo estas condiciones la métrica y la segunda forma fundamental se encuentran definidas *intrínsecamente* en M siempre y cuando tengamos definido el operador de forma S.

2. Marcos móviles

En esta sección se dará el material necesario para la prueba del teorema (4.1) y fijaremos la notación a seguir.

Sea M una subvariedad riemanniana de dimensión n de $\overline{M}^{n+1}$ y y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un marco local ortonormal de M y $\{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n\}$ las 1-formas duales i.e.

$$\omega^k(e_j) = \delta^k_j$$

Consideremos S el operador de forma de M. Definimos las siguientes 1-formas. Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\omega_j^i &:= \sum_k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k \\
\omega_j^{n+1} &:= \sum_k \langle S e_k, e_j \rangle \omega^k \\
\omega_{n+1}^j &:= -\omega_j^{n+1} \\
\omega_{n+1}^{n+1} &:= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Sea

$$\nabla_{e_k} e_j = \sum_p \Gamma_{k,j}^p e_p, \qquad k, j, p \in \{i, 2, \ldots, n\}.$$

Así tenemos que

$$\langle \nabla_{e_k} e_j, e_p \rangle = \Gamma_{k,j}^p,$$

por lo que

$$\nabla_{e_k} e_j = \sum_p \langle \nabla_{e_k} e_j, e_p \rangle e_p.$$

Ahora consideremos

$$S e_k = \sum_i \beta_k^i e_i, \quad i, k \in \{1, 2, \ldots n\},$$

entonces como $S e_k = -\nabla_{e_k} N$ tenemos

$$\langle S e_k, e_i \rangle = -\langle \nabla_{e_k} N, e_i \rangle = \beta_k^i,$$

por lo que

$$S e_k = -\sum_i \langle \nabla_{e_k} N, e_i \rangle e_i.$$

Por último definimos

$$R_{klj}^i := \langle R(e_k, e_l) e_j, e_i \rangle. \tag{7}$$

Teorema 2.1 *Las siguientes ecuaciones son ciertas*

$$d\omega^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega^p = 0 \tag{8}$$

$$\sum_p \omega_p^{n+1} \wedge \omega^p = 0 \tag{9}$$

$$d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_l R_{klj}^i \omega^k \wedge \omega^l \tag{10}$$

$$d\omega_j^{n+1} + \sum_p \omega_p^{n+1} \wedge \omega_j^p = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_k} S e_l - \nabla_{e_l} S e_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle \omega^k \wedge \omega^l \tag{11}$$

Prueba Recordemos que si θ es una 1-forma la derivada exterior actúa en un par de campos vectoriales X, Y como sigue:

$$d\theta(X,Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y]), \tag{12}$$

por lo que

$$\begin{aligned} d\omega^i(e_p, e_q) &= e_p(\omega^i(e_q)) - e_q(\omega^i(e_p)) - \omega^i[e_p, e_q] \\ &= e_p(\delta^i_q) - \omega^i(\delta^i_p) - \omega^i([e_p, e_q]) = -\omega^i([e_p, e_q]) \\ &= -\omega^i(\nabla_{e_p} e_q - \nabla_{e_q} e_p), \end{aligned}$$

ahora

$$-\omega^i(\nabla_{e_p} e_q - \nabla_{e_q} e_p) = -\omega^i_q(e_p) + \omega^i_p(e_q)$$

ya que

$$\begin{aligned} \omega^i(\nabla_{e_p} e_q - \nabla_{e_q} e_p) &= -\omega^i(\sum_k \Gamma^k_{p,q} e_k - \sum_l \Gamma^k_{q,p} e_l) = -\Gamma^i_{p,q} + \Gamma^i_{q,p} = \\ &= -\langle \nabla_{e_p} e_q, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_q} e_p, e_i \rangle \\ &= -\omega^i_q(e_p) + \omega^i_p(e_q), \end{aligned} \tag{13}$$

además

$$\sum_k w^i_k \wedge \omega^k(e_p, e_q) = \sum_k (\omega^i_k(e_p)\omega^k(e_q) - \omega^i_k(e_q)\omega^k(e_p)) = \omega^i_q(e_p) - \omega^i_p(e_q) \tag{14}$$

por lo que de (13) y (14) tenemos

$$d\omega^i + \sum_p \omega^i_p \wedge \omega^p = 0,$$

esto prueba (8). Para probar (9) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_k \omega^{n+1}_k \wedge \omega^k(e_p, e_q) &= \sum_k (\omega^{n+1}_k(e_p)\omega^k(e_q) - \omega^{n+1}_k(e_q)\omega^k(e_p)) \\ &= \omega^{n+1}_q(e_p) - \omega^{n+1}_p(e_q) = \langle S(e_p), e_q \rangle - \langle S(e_q), e_p \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

la última igualdad es cierta ya que el operador de forma es simétrico con respecto a la métrica.

Para probar (10) recordemos que $\omega^i_j = \sum_k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \omega^k$, entonces usando la compatibilidad de la conexión con la métrica tenemos

$$d\omega^i_j = \sum_k d(\langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle) \wedge \omega^k + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \wedge d\omega^k \tag{15}$$

ahora
$$d(\langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle) = \sum_l e_l(\langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle)\omega^l$$
así de lo anterior, la ecuación (15) y usando (8) tenemos
$$\begin{aligned} dw^i_j &= \sum_k \sum_l e_l(\langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle)\omega^l \wedge \omega^k + \sum_k \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle d\omega^k \\ &= \sum_k \sum_l \big(\langle \nabla_{e_l} e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle) + \langle e_i, \nabla_{e_l}\nabla_{e_k} e_j\rangle\big)\omega^l \wedge \omega^k \\ &- \sum_k \sum_l \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle \omega^k_l \wedge \omega^l. \end{aligned} \tag{16}$$
Por otro lado, al usar la definición de ω^k_l, el último sumando de la ecuación anterior se convierte en
$$\begin{aligned} \sum_k \sum_l \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle \omega^k_l \wedge \omega^l &= \sum_k \sum_l \sum_q \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l\rangle \omega^q \wedge \omega^l \\ &= \sum_l \sum_q \langle e_i, \nabla_{\nabla_{e_q} e_l} e_j\rangle \omega^q \wedge \omega^l, \end{aligned} \tag{17}$$
la última igualdad de la ecuación anterior es cierta ya que al usar símbolos de Christoffel obtenemos
$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l \sum_q \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \\ &= \sum_k \sum_l \sum_q \langle e_i, \sum_t \Gamma^t_{k,j} e_t\rangle \langle e_k, \sum_s \Gamma^s_{q,l} e_s\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \\ &= \sum_k \sum_l \sum_q \Gamma^i_{k,j}\Gamma^k_{q,l}\omega^q \wedge \omega^l = \\ &\sum_l \sum_q \big(\Gamma^i_{1,j}\Gamma^1_{q,l} + \Gamma^i_{2,j}\Gamma^2_{q,l} + \cdots + \Gamma^i_{n,j}\Gamma^n_{q,l}\big)\omega^q \wedge \omega^l. \end{aligned} \tag{18}$$
por otro lado ya que
$$\nabla_{\nabla_{e_q} e_l} e_j = \nabla_{\sum_t \Gamma^t_{q,l} e_t} e_j = \sum_t \Gamma^t_{q,l} \nabla_{e_t} e_j$$
tenemos
$$\begin{aligned} &\sum_l \sum_q \langle e_i, \nabla_{\nabla_{e_q} e_l} e_j\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \sum_l \sum_q \langle e_i, \sum_t \Gamma^t_{q,l} \nabla_{e_t} e_j\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \\ &\sum_l \sum_q \sum_t \Gamma^t_{q,l} \langle e_i, \nabla_{e_t} e_j\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \sum_l \sum_q \sum_t \Gamma^t_{q,l} \langle e_i, \sum_s \Gamma^s_{t,j} e_s\rangle \omega^q \wedge \omega^l = \\ &\sum_l \sum_q \sum_t \Gamma^t_{q,l}\Gamma^i_{t,j}\omega^q \wedge \omega^l = \sum_l \sum_q \big(\Gamma^i_{1,j}\Gamma^1_{q,l} + \Gamma^i_{2,j}\Gamma^2_{q,l} + \cdots + \Gamma^i_{n,j}\Gamma^n_{q,l}\big)\omega^q \wedge \omega^l \end{aligned} \tag{19}$$

de (18) y (19) concluimos que la igualdad es cierta.

Ahora, usando la compatibilidad de la métrica y los símbolos de Christoffel tenemos

$$\begin{aligned}\sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p &= \sum_k \sum_l \sum_p \langle e_i, \nabla_{e_l} e_p \rangle \langle e_p, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k = \\ &= -\sum_k \sum_l \sum_p \langle \nabla_{e_l} e_i, e_p \rangle \langle e_p, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k = \\ &= -\sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_l} e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k.\end{aligned} \tag{20}$$

Así al juntar (20), (17) y (16) y usando la compatibilidad de la métrica tenemos

$$d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p = \sum_k \sum_l \langle e_i, \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{\nabla_{e_l} e_k} e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k \tag{20}$$

Sumando esta identidad consigo misma, cambiando los índices k y l, recordando la definición del tensor de curvatura y que $\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$ tenemos

$$2\left(d\omega_j^i + \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_j^p \right) = \sum_k \sum_l \langle e_i, R(e_k, e_l) e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k$$

y de esta igualdad se desprende (10).

Para probar la ecuación (11) tenemos que

$$\omega_j^{n+1} := \sum_k \langle S e_k, e_j \rangle \omega^k$$

entonces

$$\begin{aligned}d\omega_j^{n+1} &= \sum_k \sum_l e_l \langle S e_k, e_j \rangle \omega^l \wedge \omega^k + \sum_k \langle S e_k, e_j \rangle d\omega^k = \\ &= \sum_k \sum_l \big(\langle \nabla_{e_l} S e_k, e_j \rangle + \langle S e_k, \nabla_{e_l} e_j \rangle \big) \omega^l \wedge \omega^k - \sum_k \sum_l \langle S e_k, e_j \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l\end{aligned}$$

el último término de la expresión anterior se transforma al usar la definición de ω_l^k y los símbolos de Christoffel en

$$\begin{aligned}\sum_k \sum_l \langle S e_k, e_j \rangle \omega_l^k \wedge \omega^l &= \sum_k \sum_l \sum_q \langle S e_k, e_j \rangle \langle e_k, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l = \\ &= \sum_l \sum_q \langle S e_j, \nabla_{e_q} e_l \rangle \omega^q \wedge \omega^l\end{aligned}$$

Por otro lado usando la definición de w_j^p tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_p \omega_p^{n+1}\wedge\omega_j^p &= \sum_k\sum_p \langle Se_k, e_p\rangle \omega^k\wedge\omega_j^p = \\ &= \sum_k\sum_p\sum_l \langle Se_k, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_l}e_j\rangle\omega^k\wedge\omega^l = \\ &= \sum_k\sum_l \langle Se_k, \nabla_{e_l}e_j\rangle\omega^k\wedge\omega^l,\end{aligned}$$

entonces usando la simetría del operador S tenemos

$$\begin{aligned}d\omega_j^{n+1}+\sum_p \omega_p^{n+1}\wedge\omega_j^p &= \sum_k\sum_l \big(\langle\nabla_{e_l}Se_k, e_j\rangle - \langle Se_j, \nabla_{e_l}e_k\rangle\big)\omega^l\wedge\omega^k = \\ &= \sum_k\sum_l \langle e_j, \nabla_{e_l}Se_k - S\nabla_{e_l}e_k\rangle\omega^l\wedge\omega^k\end{aligned}$$

Sumando esta identidad consigo misma, cambiando los índices k y l, y recordando que $\omega^k\wedge\omega^l = -\omega^l\wedge\omega^k$ tenemos

$$2\left(d\omega_j^{n+1}+\sum_p \omega_p^{n+1}\wedge\omega_j^p\right) = \sum_k\sum_l \langle e_j, \nabla_{e_l}Se_k - \nabla_{e_k}Se_l - S[e_l, e_k]\rangle\omega^l\wedge\omega^k,$$

de esta expresión se obtiene (11).

3. ¿Qué sucede con las hipersuperficies orientables de $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$?

En esta sección M será una hipersuperficie orientable de $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ o de $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$.

Denotaremos por $\mathbb{L}^n$ a $\mathbb{R}^n$ con la siguiente forma cuadrática

$$-(dx^0)^2+(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2,$$

este espacio recibe el nombre de *espacio de Lorentz.*

Consideremos las siguientes inclusiones

$$\mathbb{S}^n = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{R}^{n+1}; (x^0)^2+\sum_i (x^i)^2 = 1\},$$

y

$$\mathbb{H}^n = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{L}^{n+1}; -(x^0)^2+\sum_i (x^i)^2 = 1, x^0>0\},$$

de esto podemos concluir que

$$\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{n+2}, \quad \mathbb{H}^n\times\mathbb{R}\subset\mathbb{L}^{n+2}. \tag{17}$$

En el caso de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ sea $\kappa = 1$ y $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2}$ y en el caso de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ sea $\kappa = -1$ y $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{L}^{n+2}$ y escribamos $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$.

Denotemos por ∇, $\overline{\nabla}$ y $\overline{\overline{\nabla}}$ las conexiones de M, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{E}^{n+2}$ respectivamente y por $\overline{N}$ el vector normal unitario a $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{E}^{n+2]}$, entonces en un punto $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ tenemos

$$\overline{N}(x) = (x^0, x^1, \ldots, x^n, 0) = x - \langle x, e_{n+1}\rangle e_{n+1}; \tag{18}$$

también denotamos por N el vector normal unitario a M en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Denotemos por S al operador de forma de M en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ y por $\overline{S}$ al operador de forma de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{E}^{n+2}$, el signo de $\overline{S}$ se escogió de tal forma que la siguiente ecuación sea cierta

$$\overline{\overline{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle \overline{S}X, Y\rangle \overline{N}$$

por lo tanto recordando que $\langle \overline{N}, \overline{N}\rangle = \kappa$, tenemos

$$\langle \overline{S}X, Y\rangle = \kappa \langle \overline{\overline{\nabla}}_X Y, \overline{N}\rangle$$

así

$$\overline{S}X = -\kappa \overline{\overline{\nabla}}_X \overline{N}$$

$$\overline{S}(X) = -\kappa d\overline{N}(X) = k\Big(- X + \big\langle X, \frac{\partial}{\partial t}\big\rangle \frac{\partial}{\partial t}\Big), \tag{19}$$

esto se puede ver de la siguiente forma sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = X$, entonces

$$\begin{aligned} d\overline{N}(X) = (\overline{N} \circ \alpha)'(0) &= \frac{d}{ds}\Big(\overline{N} \circ \alpha(s)\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\Big(\alpha(s) - \langle \alpha(s), e_{n+1}\rangle e_{n+1}\Big)\Big|_{s=0} = \\ &= X - \langle X, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{20}$$

y por lo tanto la fórmula (19) es cierta.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un marco local ortonormal de M y $e_{n+1} = N$ y $e_0 = \overline{N}|_M$, sean $\omega^i_j, \omega^{n+1}_j$ y ω^{n+1}_{n+1} las fórmulas definidas por (6) y consideremos para $\gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, n+1\}$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\gamma = \overline{\nabla}_{e_k} e_\gamma + \Gamma^0_{k,\gamma} e_0 \tag{21}$$

entonces

$$\langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\gamma, e_0\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_\gamma, e_0\rangle + \kappa \Gamma^0_{k,\gamma} = \kappa \Gamma^0_{k,\gamma} \tag{22}$$

pero $e_0 = \overline{N}$, así $\langle \overline{\nabla}_{e_k} e_\gamma, e_0\rangle = 0$ y $\kappa \langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\gamma, e_0\rangle = \langle \overline{S} e_k, e_\gamma\rangle$, así definimos

$$w^0_\gamma(e_k) := \langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\gamma, e_0\rangle = \Gamma^0_{k,\gamma} = \langle \overline{S} e_k, e_\gamma\rangle = -\kappa \langle e_k, e_\gamma\rangle + \kappa \Big\langle e_k, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle \Big\langle e_\gamma, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle$$

la última igualdad se desprende de la fórmula (20). Además definimos

$$\omega_0^\gamma := \langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_0, e_\gamma \rangle - \kappa \omega_\gamma^0 \tag{23}$$

entonces tenemos que

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = \sum_\alpha \omega_\beta^\alpha(e_k) e_\alpha \tag{24}$$

Sea $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ el marco canónico ortonormal de $\mathbb{E}^{n+2}$ donde $\langle E_0, E_0 \rangle = \kappa$ y $E_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$, entonces

$$e_\beta = \sum_\alpha A_\beta^\alpha E_\alpha$$

Por lo que tenemos

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = \sum_\alpha dA_\beta^\alpha(e_k) E_\alpha,$$

Consideremos la matriz $A \in \mathscr{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ cuyos α renglón y β columna es $A(\alpha, \beta) = A_\beta^\alpha$ i.e.

$$A = \begin{pmatrix} A_0^0 & A_1^0 & A_2^0 & \cdots & A_{n+1}^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_{n+1}^1 \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_{n+1}^2 \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ A_0^{n+1} & A_{n+1}^1 & A_{n+1}^2 & \cdots & A_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

la matriz anterior cumple $A^t G A = G$ donde G se encuentra definida de la siguiente forma

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

esto es debido a que $\langle E_0, E_0 \rangle = \kappa$, además de la ecuación $A^t G A = G$ obtenemos que $\det(A) = 1$.

Por otro lado usando (24) la misma expresión puede ser escrita como

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = \sum_\alpha \sum_\gamma \omega_\beta^\gamma(e_k) A_\gamma^\alpha E_\alpha \tag{27}$$

así tenemos que

$$A\Omega = dA$$

donde $\Omega(\alpha, \beta) = \omega_\beta^\alpha \in \mathscr{M}_{n+2}(\Omega^1(U))$, de igual forma $dA \in \mathscr{M}_{n+2}(\Omega^1(U))$

La matriz A es invertible al ser una matriz de cambio de base, por lo tanto la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\Omega = A^{-1} dA \tag{28}$$

entonces de la ecuación $A^tGA = G$ obtenemos

$$\begin{aligned} A^tGA &= G \\ d(A^tGA) &= dG = 0 \\ (dA^t)(GA) + A^td(GA) &= 0 \\ (dA^t)(GA) + A^t((dG)A + GdA) &= 0 \\ (dA^t)(GA) + A^t(GdA) &= 0 \\ (dA^t)(GA) + A^t(GdA) &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

puesto que $\Omega = A^{-1}dA$ tenemos que $A\Omega = dA$ y por lo tanto $\Omega^tA^t = dA^t$. Asi podemos concluir que

$$\begin{aligned} \Omega^tA^tGA + A^tGA\Omega &=0 \\ \Omega^tA^tGA + G\Omega &= 0 \\ \Omega^tG + G\Omega &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Así tenemos que

$$A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}), \quad \Omega \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2}) \tag{31}$$

donde

$$SO(\mathbb{E}^{n+2}) = \{Z \in \mathscr{M}_{n+2}(\mathbb{R}); Z^tGZ = G, \det(Z) = 1\} \tag{32}$$

y

$$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{\Omega \in \mathscr{M}_{n+2}; \Omega^tG + G\Omega = 0\} \tag{33}$$

4. Inmersiones isométricas en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Sea M una variedad riemanniana simplemente conexa de dimensión n. Consideremos $S_y : T_yM \to T_yM$ una familia suave de operadores simétricos con respecto a la métrica T un campo vectorial sobre el haz tangente de M tal que $||T|| \leq 1$ y ν una función suave en M tal que $\nu \leq 1$.

Recordemos que para una hipersuperficie de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$ las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* toman la forma (1) y (2), entonces motivados por este hecho decimos que una variedad riemanniana cumple las *condiciones de compatibilidad* para $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ si se tiene lo siguiente

- $||T||^2 + \nu^2 = 1$.
- Para $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ tenemos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX \\ + \kappa(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X - \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle T) \\ - \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle Y + \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle T + \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle X) \end{aligned} \tag{34}$$

- $$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = \kappa\nu(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y) \tag{35}$$

- $$\nabla_X T = \nu S X \tag{36}$$

- $$d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle \tag{37}$$

Estas ecuaciones vienen motivadas de forma inversa, es decir, es posible demostrar que dichas ecuaciones se cumplen para hipersuperficies de variedades de formas espacioales (algo que no se realizará en esta tesina) y lo que se pretende demostrar en el siguiente teorema es que estas condiciones son suficientes para establecer la existencia de una inmersión isométrica, es decir, pensar a la variedad de dimensión menor como una “hipersuperficie” salvo inmersión isométrica. Los detalles del teorema se dan a continuación.

Teorema 4.1 *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n con métrica $\langle \_, \_ \rangle$ y ∇ su conexión riemanniana. Sea $S_y : T_yM \to T_yM$ una familia suave de operadores simétricos con respecto a la métrica, T un campo vectorial en el haz tangente de M y ν una función suave en M tal que $\nu^2 \leq 1$.*

Supongamos que la variedad M cumple las condiciones de compatibilidad con respecto a $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$, entonces existe una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ tal que el operador de forma con respecto al vector normal dado por f es

$$df \circ S \circ df^{-1} \tag{38}$$

y tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N; \tag{39}$$

esta isometría es única salvo isometría global de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ que preserve la orientación tanto de $\mathbb{T}^n$ como de $\mathbb{R}$.

Prueba Consideremos un marco local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en M y las formas $w^i, w^{n+1}, w^i_j, w^i_{n+1}, w^{n+1}_{n+1}$ definidas en la sección 2 usando la familia de operadores S_y. Definamos

$$T^k := \langle T, e_k\rangle, \quad T^{n+1} := \nu, \quad T^0 := 0 \tag{40}$$

además motivados por el hecho de que ν representaría el coeficiente de la parte normal de la representación de $\frac{\partial}{\partial t}$ en términos del haz tangente y el normal y que T es la parte tangente en esa representación definamos

$$\begin{gathered} w^0_j(e_k) := \kappa(T^j T^k - \delta^k_j), \quad w^0_{n+1}(e_k) := \kappa\nu T^k, \\ w^i_0 := -\kappa\omega^0_i, \quad w^{n+1}_0 := -\kappa w^0_{n+1}, \quad w^0_0 := 0 \end{gathered} \tag{41}$$

y consideremos la siguiente 1-forma

$$\eta(X) := \langle T, X\rangle \tag{42}$$

entonces en el marco local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tenemos

$$\eta = \sum_k T^k w^k$$

y de la misma forma deinimos la siguiente matriz de formas

$$\Omega = (\omega^\alpha_\beta) \in \mathscr{M}_{n+2}(\Omega(U))$$

Para establecer el teorema es necesario usar algunos resultados.

Lema 4.2 *η es una forma cerrada i.e. $d\eta = 0$.*

Prueba Para esto consideremos un par de campos vectoriales $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]) \\
&= X\langle T, Y\rangle - Y\langle T, X\rangle - \langle T, [X,Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle + \langle T, \nabla_X Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle - \langle T, \nabla_Y X\rangle - \langle T, [X,Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle + \langle T, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle - \langle T, [X,Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle \\
&= \langle \nu S X, Y\rangle - \langle \nu S Y, X\rangle = 0
\end{aligned}$$

Lema 4.3 *Para $\alpha \in \{0, 1, \ldots, n, n+1\}$ tenemos*

$$dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma w^\gamma_\alpha \tag{43}$$

Prueba Para probar este lema consideremos primero $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces es suficiente probar que ambas expresiones coinciden en el marco ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Para esto tenemos

$$\begin{aligned}
dT^\alpha(e_k) &= d\langle T, e_\alpha\rangle(e_k) = e_k\langle T, e_\alpha\rangle = \langle \nabla_{e_k} T, e_\alpha\rangle + \langle T, \nabla_{e_k} e_\alpha\rangle \\
&= \langle \nu S e_k, e_\alpha\rangle + \langle T, \nabla_{e_k} e_\alpha\rangle
\end{aligned}$$

donde la última igualdad de la expresión anterior es consecuencia de las ecuaciones de compatibilidad. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma w^\gamma_\alpha(e_k) &= T^0 w^0_\alpha(e_k) + \sum_{\gamma=0}^{n} T^\alpha \langle \nabla_{e_k} e_\alpha, e_\gamma\rangle + T^{n+1} w^{n+1}_\alpha(e_k) \\
&= 0 + \langle \nabla_{e_k} e_\alpha, \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma e_\gamma\rangle + T^{n+1}\langle S e_k, e_\alpha\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_k} e_\alpha, T\rangle + \nu\langle S e_k, e_\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{44}$$

por lo tanto ambas ecuaciones coinciden para $\alpha \in \{1,,..,n\}$. Ahora supongamos que $\alpha = 0$ entonces

$$dT^0 = 0 \tag{45}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma w_0^\gamma(e_k) &= \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma w_0^\gamma(e_k) + \nu w_0^{n+1}(e_k) = \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n} -\kappa T^\gamma w_\gamma^0(e_k) - \nu^2 T^k \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n} -T^\gamma(T^\gamma T^k + \delta_\gamma^k) - \nu^2 T^k \\
&= (-1+\nu^2)T^k + T^k - \nu^2 T^k = 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Para el caso donde $\alpha = n+1$ tenemos

$$dT^{n+1}(e_k) = d\nu(e_k) = -\langle Se_k, T\rangle \tag{47}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma w_{n+1}^\gamma(e_k) &= \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma w_{n+1}^\gamma(e_k) = -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma w_\gamma^{n+1}(e_k) \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma \langle Se_k, e_\gamma\rangle = -\langle Se_k, \sum_{\gamma=1}^{n} T^\gamma e_\gamma\rangle = -\langle Se_k, T\rangle.
\end{aligned} \tag{48}$$

así la fórmula es cierta.

Lema 4.4 *Se tiene que $d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$.*

Prueba Consideremos $\Psi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$, entonces usando la ecuación (10) tenemos para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\Psi_j^i = -\frac{1}{2}\sum_k \sum_l R_{klj}^i w^k \wedge w^l + w_{n+1}^i \wedge w_j^{n+1} + w_0^i \wedge w_j^0 \tag{49}$$

al considerar las ecuaciones de compatibilidad tenemos que

$$\begin{aligned}
R_{klj}^i = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i\rangle &= \langle Se_k, e_j\rangle\langle Se_l, e_i\rangle - \langle Se_l, e_j\rangle\langle Se_k, e_i\rangle + \\
&\kappa(\langle e_k, e_j\rangle\langle e_l, e_i\rangle - \langle e_l, e_j\rangle\langle e_k, e_i\rangle - \langle e_l, T\rangle\langle e_k, e_j\rangle\langle T, e_i\rangle + \\
&\langle e_l, T\rangle\langle e_j, T\rangle\langle e_k, e_i\rangle)
\end{aligned} \tag{50}$$

Así definiendo

$$\overline{R}_{klj}^i = \kappa(\delta_j^k \delta_i^l - \delta_j^l \delta_i^k - T^l t^i \delta_j^k - T^k T^j \delta_i^l + T^k T^i \delta_j^l T^l T^j \delta_i^k) \tag{51}$$

por otro lado es fácil ver usando las definiciones que $w_0^i \wedge w_j^0(e_k, e_l) = \overline{R}^i_{klj}$ así tenemos que

$$R^i_{klj} = w^i_{n+1} \wedge w_j^{n+1}(e_k, e_l) + w_0^i \wedge w_j^0(e_k, e_l) \tag{52}$$

con lo que obtenemos que $\Psi^i_j = 0$.

Para mostrar que $\Psi_j^{n+1} = 0$ consideremos lo siguiente, por la ecuación (11) tenemos lo siguiente

$$\Psi_j^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_l \langle \nabla_{e_k} Se_l - \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle w^k \wedge w^l + w_0^{n+1} \wedge w_j^0$$

ahora usando las ecuaciones de compatibilidad tenemos que

$$\langle \nabla_{e_k} Se_l, \nabla_{e_l} Se_k - S[e_k, e_l], e_j \rangle = \kappa(T^l T^{n+1} \delta^k_j - T^k T^{n+1} \delta^l_j)$$

por otro lado usando las definiciones y haciendo un cálculo de rutina tenemos que

$$w_0^{n+1} \wedge w_j^0(e_k, e_l) = \kappa(T^k T^{n+1} \delta^l_j - T^l T^{n+1} \delta^l_j)$$

por lo tanto $\Psi_j^{n+1} = 0$. Para probar que $\Psi_j^0 = 0$ consideremos lo siguiente

$$\Psi_j^0(e_p, e_q) = dw_j^0(e_p, e_q) + \sum_k w_k^0 \wedge w^k_{n+1}(e_p, e_q) \tag{53}$$

ahora

$$dw_j^0(e_p, e_q) = \kappa d(T^j \eta - w^j)(e_p, e_q) = \kappa(dT^j(e_p)\eta(e_q)) + T^j d\eta(e_p, e_q) - dw^j(e_p, e_q))$$

pero por el lema (4.2) η es una forma cerrada; así, por la ecuación (8) tenemos que

$$dw_j^0 = \kappa(dT^j \wedge \eta - dw^j) = \kappa dT^j \wedge \eta + \kappa \sum_k w_k^j \wedge w^k$$

por lo tanto la ecuación (53) se transforma al usar las definiciones de las formas en

$$\begin{aligned}
\Psi_j^0(e_p, e_q) &= \kappa\big(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) + \sum_k w_k^j \wedge w^k(e_p, e_q)\big) \\
&= + \sum_k w_k^0 \wedge w_j^k(e_p, e_q) + w^0_{n+1} \wedge w_j^{n+1}(e_p, e_q) = \\
&= \kappa(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) + w_q^j(e_p) - w_p^j(e_q)) \\
&+ \kappa\left(T^p \sum_k T^k w_j^k(e_q) - T^q \sum_k T^k w_j^k(e_p) + w_j^q(e_p) - w_j^p(e_q)\right) \\
&+ \kappa(T^p T^{n+1} w_j^{n+1}(e_q) - T^q T^{n+1} w_j^{n+1}(e_p)) \\
&= \kappa(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) + w_q^j(e_p) - w_p^j(e_q) \\
&+ \kappa(dT^j(e_q)\eta(e_q) - dT^j(e_p)\eta(e_q)) + w_j^p(e_q) - w_j^q(e_p) = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

la última igualdad se sigue ya que $w_j^p = -w_p^j$: Para demostrar que $\Psi_{n+1}^0 = 0$ consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}^0(e_p, e_q) &= dw_{n+1}^0(e_p, e_q) + \sum_k w_k^0 \wedge w_{n+1}^k(e_p, e_q) \\ &= \kappa(T^q dT^{n+1}(e_p) - T^q T^{n+1}(e_q)) \\ &+ \kappa\Big(T^p \sum_k T^k w_{n+1}^k(e_q) - T^q \sum_k T^k w_{n+1}^k(e_p)\Big) \\ &= \kappa(-w_{n+1}^p(e_q) + w_{n+1}^q(e_p)) = 0\end{aligned} \tag{55}$$

usando el lema 4.3 y la simetría del operador S con respecto a a la métrica obtenemos lo deseado. $\Psi_0^0 = 0$ ya que $w_0^0 = 0$ y usando las propiedades del producto exterior obtenemos el resultado, Análogamente $\Psi_{n+1}^{n+1} = 0$ por razones semejantes. $\Psi_{n+1}^j = 0$ ya que $\Psi_{n+1}^j = -\Psi_j^{n+1} = 0$

Sea $y \in \mathbb{T}^n$ y consideremos $\mathscr{Z}(y)$ el conjunto de matrices en $SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ tal que los coeficientes del último renglón son $T^\beta(y)$, este conjunto es una variedad ya que el siguiente mapeo

$$F : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \to \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$$

que a cada matriz en $SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ le asocia su último renglón y donde $\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle x, x\rangle = 1\}$ es una submersión.

Lema 4.5 *Supongamos que las ecuaciones de compatibilidad para $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ se cumplen. Sea $y_0 \in \mathbb{T}^n$ y $A_0 \in \mathscr{Z}(y_0)$. Entonces existe una vecindad U_1 de y_0 en $\mathbb{M}^n$ y un único mapeo $A : U_1 \to SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ tal que*

$$A^{-1}dA = \Omega, \quad \forall y \in U_1, A(y) \in \mathscr{Z}(y), \quad A(y_0) = A_0 \tag{56}$$

Prueba Consideremos U un abierto coordenado de $\mathbb{T}^n$ y sea

$$\mathscr{F} := \{(y, Z) \in U \times SO^+(\mathbb{E}^{n+2}); Z \in \mathscr{Z}(y)\} \tag{57}$$

se probará que

$$T_{(y,Z)}\mathscr{F} = \{(u, \zeta) \in T_yU \oplus T_Z SO^+(\mathbb{E}^{n+2}); \zeta_B^{n+1} = (dT^\beta)_y(u)\} \tag{58}$$

para esto en cada punto $y \in \mathbb{M}^n$ existe un abierto U y un mapeo $y \to M(y) \in SO^+(\mathscr{E}^{n+2})$ tal que el último renglón de $M(y)$ es $(T^\beta(y))_0^{n+1}$. Ahora para Z arbitrarìa en $\mathscr{Z}(y)$ tenemos que

$$Z \in \mathscr{Z}(y), \quad \textit{si y sólo si} \quad Z = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} M(y) \tag{59}$$

donde B es una matriz en $SO(\mathbb{E}^{n+1})$, al considerar una parametrización suave de $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} M(y)$ obtenemos que el mapeo $(y, v) \mapsto (y, \psi(v)M(y))$ es una parametrización local de $\mathscr{F}$. Así es claro que $\dim \mathscr{F} = n + \frac{n(n+1)}{2}$. Si pensamos a $\mathscr{F}$ como el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"] & SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "T"'] & \mathbb{R}^{n+2} \end{tikzcd} \tag{60}$$

donde T es el campo vectorial y p es la proyección en el último renglón de la matriz se desprende fácilmente que

$$T\mathscr{F}_{(y,Z)} = \{(u, \zeta) \in T_yU \oplus T_Z SO^+(\mathbb{E}^{n+2}); \zeta_B^{n+1} = (dT^\beta)_y(u)\}$$

Consideremos $\pi : \mathscr{F} \to SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \subset \mathscr{M}_{n+2}(\mathbb{R})$, entonces tenemos que $d\pi_{(y,Z)} : T_{(y,Z)}\mathscr{F} \to \mathscr{M}_{n+2}(\mathbb{R})$. Definamos la siguiente matriz de 1-formas para $(u, \zeta) \in T_{(y,Z)}\mathscr{F}$

$$\begin{aligned} \Theta_{(y,Z)} &: T_{(y,Z)}\mathscr{F} \to \mathscr{M}_{n+2}(\mathbb{R}) \\ \Theta_{(y,Z)}(u,\zeta) &:= Z^{-1} d\pi_{(y,Z)}(u,\zeta) - \Omega_y(u) = Z^{-1}\zeta - \Omega_y(u) \end{aligned} \tag{61}$$

lo siguiente por probar es que $\ker \Theta_{(y,Z)} := \mathscr{D}(y, Z)$ tiene dimensión n. Para esto, $\Theta_{(y,Z)} \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$ ya que se probó que $\Omega \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$. Ahora

$$(Z\Theta)_\beta^{n+1} = Z(Z^{-1}d\pi - \Omega) = (d\pi)_\beta^{n+1} - (Z\Omega)_\beta^{n+1} = (d\pi)_\beta^{n+1} - \sum_\gamma Z_\gamma^{n+1}\Omega_\beta^\gamma \tag{62}$$

así

$$(Z\Theta_{(y,Z)}(u,\zeta))_\beta^{n+1} = (\zeta)_\beta^{n+1} - \sum_\gamma Z_\gamma^{n+1}\omega_\beta^\gamma \tag{63}$$

pero por las propiedades del espacio tangente de $\mathscr{F}$ tenemos que $\zeta_\beta^{n+1} = (dT^\beta)_y(u)$, por lo que

$$(Z\Theta_{(y,Z)}(u,\zeta))_\beta^{n+1} = (dT^\beta)_y(u) - \sum_\gamma T^\gamma\omega_\beta^\gamma = 0 \tag{64}$$

la última igualdad se desprende del lema (4.3). Esto nos dice que la imagen de $\Theta_{(y,Z)}$ se encuentra contenida en el siguiente espacio

$$\mathscr{H} := \{H \in \mathfrak{so}^+(\mathbb{E}^{n+2}); (ZH)_\beta^{n+1} = 0\} \tag{65}$$

y este espacio tiene dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Parar probar lo anterior hay que considerar varias cosas:

1. $H \in \mathscr{H}$ si y sólo si $ZH \in \ker(d\pi)_Z$. donde $\pi : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \to \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ es la proyección en el último renglón que es una submersiòn.

2. $T\mathscr{F}_{(y,Z)} \supseteq \{(0, ZH); H \in \mathscr{H}\}$.

3. La restricción de $\Theta_{(y,Z)}$ a $\{(0, ZH); H \in \mathscr{H}\}$ es el mapeo $(0, ZH) \to H$.

1) es fácil de ver por la definición de π, 2) es claro a partir de las definiciones de $T\mathscr{F}$ y $\mathscr{H}$ al igual que 3) usando la definición de $\Theta_{(y,Z)}$. Al usar las propiedades anteriores tenemos que

$$\pi : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \to \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$$

es una submersión por lo que

$$\begin{aligned}
\dim(\ker d\pi_Z) &= \dim(SO^+(\mathbb{E}^{n+2})) - \dim(\mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

así la dimensión de $\mathscr{H}$ es $\frac{n(n+1)}{2}$ y como $\Theta_{(y,Z)} : T\mathscr{F}_{(y,Z)} \to \mathscr{H}$ es epimorfismo, tenemos que

$$\dim(\ker \Theta_{(y,Z)}) = n$$

Lo siguiente por probar es que la distribución $D(y, Z)$ es involutiva o integrable para esto consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Theta &= Z^{-1}d\pi - \Omega \\
d\Theta &= d(Z^{-1}d\pi) - d\Omega \\
d\Theta &= d(Z^{-1}) \wedge d\pi + Z^{-1}d^2\pi - d\Omega \\
d\Theta &= -Z^{-2}d\pi \wedge d\pi - d\Omega = -Z^{-1}d\pi \wedge Z^{-1}d\pi - d\Omega
\end{aligned}$$

usando que $\Theta = Z^{-1}d\pi - d\Omega$ tenemos

$$\begin{aligned}
d\Theta &= -Z^{-1}d\pi \wedge Z^{-1}d\pi - d\Omega \\
&= -(\Theta + \Omega) \wedge (\Theta + \Omega) - d\Omega \\
&= -\Theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega - \Omega \wedge \Theta - \Omega \wedge \Omega - d\Omega
\end{aligned}$$

usando que $d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$ tenemos que para un par de campos vectoriales X, Y en $T\mathscr{F}$ $d\Omega(X, Y) = 0$, por otro lado

$$d\Omega(X, Y) = X\Omega(Y) - Y\Omega(X) - \Omega[X, Y]$$

así concluimos que $\Theta[X, Y] = 0$ y por lo tanto la distribución es integrable. Ahora tomemos $\mathscr{A}$ una variedad maximal integrable del punto $(y_0, A_0) \in \mathscr{F}$, se probará que la variedad $\mathscr{A}$ la podemos expresar localmente como la gráfica de una función de la forma $A : U_1 \to SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$. Para esto considemos la pareja $(0, \xi) \in T_{(y_0,A_0)}\mathscr{A}$, entonces

$$\Theta_{(y_0,A_0)}(0, \xi) = 0 = A_0^{-1}\xi$$

así tenemos que en este caso $\xi = 0$ y por lo tanto la única forma de que un vector en $T_{(y_0,A_0)}\mathscr{A}$ tenga primera coordenada 0 es que sea el vector 0, por lo tanto localmente podemos expresar a la variedad $\mathscr{A}$ como una función $A : U_1 \to SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ donde $\phi(y_0) = A_0$ y además

$$A^{-1}dA = \Omega$$

Por construcción esta función es localmente única.

Prueba Prueba del Teorema Principal

Consideremos $y_0 \in \mathbb{M}^n$ y $A_0 \in \mathscr{L}(y_0)$ sabemos por el teorema anterior que existe un abierto $y_0 \in U_1$ y un mapeo único $A : U_1 \to SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ tal que

$$A^{-1}dA = \Omega, \quad A(y_0) = A_0$$

podemos asumir sobre U_1 que es simplemente conexa.

Definamos las siguientes funciones $f^0 := A_0^0$ y $f^i := A_0^i$, por el lema (4.2) sabemos que η es una 1-forma cerrada en $\mathbb{M}^n$ por lo tanto existe una función f^{n+1} tal que $f^{n+1} = d\eta$ y $f^{n+1}(y_0) = t_0 \in \mathbb{R}$. En este punto tenemos dos posibles casos

- Para $\mathbb{S}^n$ tenemos $(f^0)^2 + \sum_i (f^i)^2 = 1$, así $(f^0, f^1, \dots, f^n) \in \mathbb{S}^n$. 1
- Para $\mathbb{H}^n$ tenemos $-(f^0)^2 + \sum_i (f^i)^2 = -(A_0^0)^2 + \sum_i (f^i)^2 + (A_0^{n+1})^2 = -1$, así $(f^0, f^1, \dots, f^n) \in \mathbb{H}^n$.

por lo tanto $f = (f^0, \dots, f^{n+1}) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Ahora como $dA = A\Omega$ tenemos para $\alpha < n + 1$

$$\begin{aligned}
df^\alpha(e_k) &= (dA)_0^\alpha(e_k) = dA_0^\alpha(e_k) \\
&= \sum_j A_j^\alpha \Omega_0^j(e_k) = \sum_j A_j^\alpha \omega_0^j(e_k) + A_{n+1}^\alpha \omega_0^{n+1}(e_k) \\
&= \sum_j A_j^\alpha(\delta_j^k - T^j T^k) - A_{n+1}^\alpha T^{n+1} T^k \\
&= A_k^\alpha - T^k \sum_\beta A_\beta^\alpha T^\beta \\
&= A_k^\alpha - T^k \sum_\beta A_\beta^\alpha A_\beta^{n+1} \\
&= A_k^\alpha
\end{aligned}$$

también
$$df^{n+1}(e_k) = \eta(e_k) = T^k = A_k^{n+1}$$
así $df(e_k)$ se encuentra dada por la columna k-ésima de A . Ahora como A es una matriz invertible quiere decir que df tiene rango n por lo tanto f es una inmersión y además $\langle df(e_p), df_(e_q)\rangle = \delta_q^p$, esto debido a que $A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$. Puesto que $\{e_k\}$ es un marco ortonormal unitario tenemos que f es una isometría. Las columnas de A forman una base ortogonal para $\mathbb{E}^{n+2}$, esto es claro al ser A invertible, también puesto que $\{e_i\}_1^n$ es un marco ortonormal para $\mathbb{M}^n$, entonces las columnas de 1 a n forman una base ortonormal de $T_{f(y)}f(\mathbb{M}^n)$ y la columna 0 es la proyección de f en $\mathbb{T}^n \times 0$, i.e. el vector normal unitario de $f(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{E}^{n+2}$ y la columna $n+1$ representa el vector normal unitario de $f(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ ambos en el punto $f(y)$. Ahora recordemos que $\langle SX, Y\rangle = \kappa\langle \nabla_X Y, N\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{X_i} X_j, N\rangle &= \langle \nabla_{df(e_i)} df(e_j), N\rangle = \\
&= \langle dX_j(X_k), N\rangle = \sum_\alpha dA_j^\alpha(X_k)A_{n+1}^\alpha = \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta A_\beta^\alpha \omega_j^\beta(X_k)A_{n+1}^\alpha = \sum_\alpha A_{n+1}^\alpha A_{n+1}^\alpha \omega_j^{n+1}(X_k) \\
&= \omega_j^{n+1}(X_k) = \langle Se_k, e_j\rangle = \langle Sdf^{-1}(X_k), df^{-1}(X_j)\rangle = \\
&= \langle dfSdf^{-1}(X_k), X_j\rangle
\end{aligned}$$

de esto obtenemos que el operador de forma es $df \circ S \circ df^{-1}$. Ahora como $A \in \mathscr{L}(y)$ tenemos que $A = (\overline{N}, X_1, x_2, \ldots, X_n, N)$ donde N es el vector normal unitario a $f(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ y $\overline{N}$ es el vector normal unitario a $F(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{E}^{n+2}$. Ahora $\partial/\partial t = (0, \ldots, 1)$ en el marco canónico de $\mathbb{E}^{n+2}$, así usando que $A \in \mathscr{A}(y)$ usando la descripción de A tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_1^n T^i X_i + T^{n+1}N = df(T) + \nu N$$

Lo siguiente será probar que la inmersión anterior es única salvo isometría global. Para esto consideremos $\overline{f} : U_3 \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ otra inmersión que cumple las propiedades del teorema donde U_3 es un abierto simplemente conexo de y_0 que por simplicidad consideraremos $U_3 \subset U_2$. Sea $\{\overline{X_\alpha}\}$ el marco local ortonormal generado por esta inmersión i.e. $\overline{X_i} = d\overline{f}(e_i)$, $\overline{X}_0$ el vector normal unitario a $f(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{E}^{n+2}$ y $\overline{X}_{n+1}$ el vector normal unitario a $f(\mathbb{M}^n)$ en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ en el punto $\overline{f}(y_0)$. Bajo una isometría global podemos suponer que $f(y_0) = \overline{f}(y_0)$ y $X_\alpha(y_0) = \overline{X}_\alpha(y_0)$. Sea $\overline{A} = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{n+1}\}$, entonces $\overline{A}(y_0) = A(y_0)$ y $\overline{A}d\overline{A} = \Omega$ y claramente $\overline{A}(y) \in \mathscr{L}(y)$, entonces por la unicidad mostrada en el lema (4.5) tenemos que $A = \overline{A}$. Considerando la columna cero de ambas matrices obtenemos que $f^i = \overline{f}^i$ para todo $i \in \{0, 1, .., n\}$ y puesto que $df^{n+1} = \eta = d\overline{f}^{n+1}$ y $f^{n+1}(y_0) = \overline{f}^{n+1}(y_0)$, así $f^{n+1} = \overline{f}^{n+1}$ y por lo tanto $f = \overline{f}$.

Para probar que esta inmersión local puede ser extendida a todo $\mathbb{M}^n$ de una única forma consideremos lo siguiente: Sea y_1 un punto en $\mathbb{M}^n$, entonces como el espacio es simplemente conexo tenemos que existe una curva $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{M}^n$ tal que $\Gamma(0) = y_0$ y $\Gamma(1) = y_1$. Cada punto en la trayectoria de Γ tiene una única inmersión isométrica local satisfaciendo las propiedades del teorema. Puesto que el espacio $[0,1]$ es compacto, podemos extraer una subcubierta finita $W_1, W_2, \ldots W_r$, entonces usando que las inmersiones son localmente únicas podemos obtener una única extensión, así $f(y_1)$ se encuentra definida de forma única, y el valor no depende de la curva Γ escogida.

5. Conclusiones

El trabajo presentado da condiciones necesarias y suficientes para el establecimiento de inmersiones de variedades de codimensión 1 a los espacios $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, el material necesario para responder a esto fue definir lo que sería el operador de forma y la segunda forma fundamental junto con las ecuaciones fundamentales de *Gauss* y *Codazzi* para estas formas espaciales.

El problema de encontrar inmersiones isométricas en formas espaciales ha sido estudiado ampliamente en [BOC03], existe un teorema que asegura que bajo ciertas condiciones es posible establecer una inmersión isométrica (local) a una forma espacial con curvatura k (para detalles véase [BOC03], [Spi75]) la prueba es básicamente encontrar los operadores que hacen falta para poder definir el operador de forma y la segunda forma fundamental y encontrar 1 formas que sean cerradas para poder construir la función de inmersión, estas ideas fueron usadas en la construcción de la inmersión estableida en el teorema (4.1)

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi son suficientes y necesarias para la geometría de subvariedades. El problema de encontrar inmersiones isométricas en espacios de curvatura seccional no constante o de codimensión superior sigue siendo un problema abierto. Una posible generalización de este resultado sería encontrar inmersiones a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^m$ de variedades de codimensión 1 o mayor.

Referencias

[BOC03] J. Berndt, C.E. Olmos, and S. Console. *Submanifolds and Holonomy.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Taylor & Francis, 2003.

[Dan09] Benoît Daniel. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc*, 361(12):6255–6282, 2009.

[Dar94] R.W.R. Darling. *Differential Forms and Connections*. Cambridge University Press, 1994.

[DC98] M.P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[DC13] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, 2013.

[dC16] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016.

[Lee97] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997.

[Pet16] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.

[Spi75] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol 1-5*. Number v. 3 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, Incorporated, 1975.

[Ten71] Keti Tenenblat. On isometric immersions of Riemannian Manifolds. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2(2):23–36, Sep 1971.