Hipersuperficies tipo espacio con curvatura media constante en variedades de Lorentz

Marco A. Ortega Cruz

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana–Iztapalapa, México.
E-mail: matmaoc@yahoo.com.mx

and

Oscar Palmas

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México.
E-mail: opv@hp.fciencias.unam.mx

En este trabajo se estudian las hipersuperficies con curvatura media constante en algunas variedades de Lorentz, destacando el caso del espacio de De Sitter. Se hace una caracterización local de las hipersuperficies de rotación de este espacio en términos de sus curvaturas principales. Se agrega la condición de que la r-ésima función simétrica de las curvaturas principales sea constante para clasificar estas hipersuperficies de rotación. Finalmente se presenta un resultado original, mostrando la estabilidad de algunas hipersuperficies de rotación con curvatura media constante.

Key Words: Curvatura media, variedades de Lorentz

INTRODUCCIÓN

Una *superficie mínima* en $\mathbb{R}^3$ es una superficie cuya curvatura media H es nula en todos sus puntos. Esta curvatura está dada por $2H = \kappa_1 + \kappa_2$, donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales de la superficie. (Recordaremos las definiciones pertinentes en la sección de Preliminares.) En un contexto general, podemos considerar una hipersuperficie M^n inmersa en una variedad ambiente $\bar{M}^{n+1}$, las curvaturas principales $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ de M y la siguiente función:

$$f(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) = nH = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n.$$

Decimos entonces que M es *mínima* si $f(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \equiv 0$.

Como otro ejemplo del tipo de objetos que queremos estudiar podemos mencionar aquellas hipersuperficies donde se anula (o es constante) otra función de las curvaturas principales, la curvatura de Gauss-Kronecker dada por

$$g(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) = \kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_n.$$

Una extensión natural de los dos casos anteriores utiliza la r-ésima función simétrica σ_r de las curvaturas principales, que define la *r-ésima curvatura media* H_r como sigue:

$$\binom{n}{r} H_r = \sigma_r(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r}. \tag{1}$$

Obsérvese que $H = H_1$ y que H_n es la curvatura de Gauss-Kronecker. Actualmente se busca generalizar las propiedades y resultados relativos a las superficies con $H_1 = 0$ ó $H_n = 0$ al caso de las hipersuperficies con H_r constante (no necesariamente nula).

Volviendo al caso original de las superficies mínimas, se sabe que éstas pueden caracterizarse como puntos críticos de un problema variacional, consistente en minimizar el área entre todas las superficies que tienen como frontera a una curva fija en $\mathbb{R}^3$. En este contexto, es importante saber en qué casos estos puntos críticos corresponden a mínimos estrictos de la función de área; cuando esto ocurre, decimos que la superficie mínima es *estable*.

La extensión de la situación anterior al caso de las variedades riemannianas surge en un artículo de Barbosa y do Carmo [3] (véase también [4]). Ahora se sabe que las hipersuperficies con curvatura media constante son puntos críticos de un problema variacional, el de minimizar el área para variaciones que preservan el volumen. Más en general, Barbosa y Colares mostraron en [5] que las hipersuperficies con H_r constante en formas espaciales también son puntos críticos de un problema variacional. En estos tres artículos se define y analiza con detalle el concepto de estabilidad.

Esta teoría se puede extender también al caso en que el ambiente es una variedad semi-riemanniana, cuya definición recordamos a continuación.

Definition 1. Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable $\bar{M}$ tal que para cada punto $p \in \bar{M}$, existe una forma bilineal simétrica y no degenerada $\langle\, , \rangle_p$ en $T_p\bar{M}$ que varía diferenciablemente con p. Se requiere además que el índice ν de $\langle\, , \rangle_p$, es decir, la dimensión del mayor subespacio $W \subset T_p\bar{M}$ en el cual la forma $\langle\, , \rangle_p$ es definida negativa, sea constante en $\bar{M}$. Se dice que $\bar{M}$ es una *variedad de Lorentz* si $\nu = 1$.

Como primer ejemplo de variedad de Lorentz tenemos a $\mathbb{R}_1^{n+2}$, que denota al espacio vectorial de dimensión $n+2$ dotado de la métrica

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2} v_{n+2}$$

donde $u = (u_1, \ldots, u_{n+2})$, $v = (v_1, \ldots, v_{n+2})$.

La variedad de Lorentz que estudiaremos con detalle es el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, dado como la esfera unitaria en $\mathbb{R}_1^{n+2}$; es decir,

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle x, x\rangle = 1\right\}. \tag{2}$$

El interés en el estudio de las variedades de Lorentz reside en el hecho de que sirven como modelos del espacio-tiempo en la relatividad general. En particular, el espacio de De Sitter es un modelo de espacio-tiempo con curvatura seccional constante. En este contexto, las hipersuperficies de curvatura media constante son importantes, por ejemplo, para el estudio de la propagación de las ondas gravitacionales [9].

Sean $\bar{M}^{n+1}$ una variedad de Lorentz orientable y $M^n \subseteq \bar{M}^{n+1}$ una hipersuperficie conexa y orientable con frontera ∂M (posiblemente vacía) en $\bar{M}$. Cuando la restricción de la métrica de $\bar{M}$ a M es una métrica riemanniana, se dice que M es una *hipersuperficie tipo espacio*. Análogamente se define una *inmersión tipo espacio*. En este artículo consideraremos sólo hipersuperficies e inmersiones de este tipo.

Más adelante (ejemplo 5) veremos que en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ se pueden obtener hipersuperficies tipo espacio cortando con hiperplanos de $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Adicionalmente, estas hipersuperficies tienen curvatura media constante y son totalmente umbílicas.

En 1977, Goddard conjeturó que las únicas hipersuperficies de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ completas, tipo espacio y con curvatura media constante eran las anteriores. Sin embargo, en 1981 Dajczer y Nomizu construyeron una superficie completa con curvatura media constante en $\mathbb{S}_1^3$ no umbílica, mostrando la falsedad de la conjetura de Goddard en su formulación general, así como la necesidad de establecer condiciones adicionales para que una hipersuperficie completa, tipo espacio y con curvatura media constante fuese totalmente umbílica.

Los primeros resultados en esta dirección fueron obtenidos de manera independiente por Ramanathan y por Akutagawa en 1987, quienes mostraron que si una superficie completa en $\mathbb{S}_1^3$ satisface $H^2 < 1$, entonces la superficie es totalmente umbílica; es decir, la conjetura de Goddard es cierta si $n = 2$ y $H^2 < 1$.

Akutagawa también mostró que para cada constante $H^2 > 1$ existe una superficie completa, con curvatura media constante y no umbílica en $\mathbb{S}_1^3$.

Un año después, Montiel [10] demostró que la conjetura de Goddard tiene una respuesta afirmativa en el caso compacto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ sin restricción sobre el rango de H. Además, construyó ejemplos de hipersuperficies tipo espacio completas no umbílicas en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con curvatura media constante H tal que $H^2 > 4(n-1)/n^2$; analizamos estos ejemplos más adelante.

En relación con la estabilidad de las hipersuperficies con curvatura media constante en el caso lorentziano, Barbosa y Oliker mostraron en [6] que el problema variacional fundamental es el de *maximizar* el área y obtuvieron varios resultados en $\mathbb{R}_1^{n+1}$ y $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Para finalizar esta introducción, mencionaremos que una de las técnicas que permite estudiar a las hipersuperficies con curvatura media constante consiste en suponer que éstas poseen algún tipo de simetría; es decir, que son invariantes bajo la acción de un grupo de isometrías del espacio ambiente. Por ejemplo, se ha estudiado con éxito a las hipersuperficies de rotación con curvatura media constante. En este trabajo se hace una revisión de varios de los resultados existentes en la literatura relativos a estas hipersuperficies.

Al final de este trabajo presentamos un resultado original, mostrando la estabilidad de algunas de las hipersuperficies de rotación con curvatura media constante.

1. PRELIMINARES

Sean $\bar{M}^{n+1}$ una variedad de Lorentz orientable con métrica $\langle\ ,\ \rangle$ y conexión semi-riemanniana denotada por $\bar{D}$. Sea M una hipersuperficie orientable tipo espacio con conexión riemanniana D. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ en M y por N un campo unitario normal a M. Es sabido que $\bar{D}$ y D están relacionadas por

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle \bar{D}_X Y, N\rangle N = D_X Y - \langle \bar{D}_X N, Y\rangle N.$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\bar{D}_X Y$ denota, por abuso de notación, la aplicación de $\bar{D}$ a extensiones de X y Y a $\bar{M}$.

Definition 2. El *operador de forma* S de M está dado por

$$S_p(X) = -(\bar{D}_X N)(p).$$

Se sabe que S_p es un operador diagonalizable para cada p; los valores propios de S_p, denotados por $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ son las *curvaturas principales* de M en p.

Definition 3. Se dice que M es *totalmente umbílica* si y sólo si existe una función λ tal que $S_p(X) = \lambda(p)X(p)$ para cada p; en este caso, las curvaturas principales satisfacen $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = \lambda$.

$\bar{R}$ denota el tensor de curvatura de $\bar{M}$. Este tensor permite definir la curvatura seccional $\bar{K}$ de $\bar{M}$ como

$$\bar{K}_p(X,Y) = \frac{\langle \bar{R}_{XY}X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2};$$

De la misma forma, R y K denotan el tensor de curvatura y la curvatura seccional de M. Las curvaturas seccionales y el operador de forma S_p están relacionadas mediante la ecuación de Gauss

$$K_p(X,Y) = \bar{K}_p(X,Y) - \frac{\langle S_pX,X\rangle\langle S_pY,Y\rangle - \langle S_pX,Y\rangle^2}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}. \tag{3}$$

Por último, definimos la curvatura de Ricci de $\bar{M}$ en la dirección de un vector unitario X, denotada $\mathrm{Ricci}(X)$, como la traza de la transformación $Y \longmapsto R_{XY}X$.

El espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, definido por la ecuación (2), tiene características similares a las de la esfera unitaria en un espacio euclidiano. Resumimos estas propiedades en la siguiente proposición, cuya demostración es directa y se omite.

Proposition 4. *El espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ satisface:*

1.El campo vectorial de posición V de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es, en todo punto, normal al espacio de De Sitter;
2.$\mathbb{S}_1^{n+1}$ tiene curvatura seccional constante igual a 1;
3.Si $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ es una inmersión tipo espacio de una variedad orientable M y N es un campo vectorial unitario normal a M, tenemos que $\mathrm{Ricci}(N) = n$.

2. EJEMPLOS DE HIPERSUPERFICIES EN $\mathbb{S}_1^{N+1}$

En esta sección presentamos algunos ejemplos de hipersuperficies en el espacio de De Sitter. Primero analizaremos el caso umbílico, como en [10].

Proposition 5. *Sea M^n una hipersuperficie en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por la intersección de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con un hiperplano afín de $\mathbb{R}_1^{n+2}$; esto es,*

$$M^n = \left\{ \ x \in \mathbb{S}_1^{n+1} \ ; \ \langle x, a\rangle = \tau \ \right\},$$

donde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$*,* $|a|^2 = \sigma = 1, 0, -1$*, y* $\tau^2 > \sigma$*. Entonces* M *es totalmente umbílica. Además,* M *tiene curvatura media constante dada por*

$$H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma}$$

y es isométrica a un espacio hiperbólico, al espacio euclidiano o a una esfera, dependiendo del valor respectivo de σ*.*

Proof. Es fácil verificar que el campo

$$N(p) = \frac{(a - \tau p)}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}}$$

es un campo unitario normal a M y que el operador de forma es

$$\begin{aligned} S_p(X) &= -\bar{D}_X N = -\bar{D}_X \left(\frac{a - \tau p}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= -\frac{1}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \bar{D}_X a - \tau \bar{D}_X p \right\} = \frac{\tau}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, M es totalmente umbílica. La afirmación de que M tiene curvatura media constante se sigue de la última expresión. Por otro lado, usando que el espacio de De Sitter tiene curvatura seccional 1, la ecuación de Gauss (3) y la expresión para S_p, tenemos que la curvatura seccional de M es

$$K = 1 - \left(\frac{\tau}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = -\frac{\sigma}{\tau^2 - \sigma}. \tag{4}$$

Ahora analizaremos tres casos por separado:

1. $\sigma = 1$. Seguiremos una idea de Aledo [2]. Para demostrar que M es isométrica a un espacio hiperbólico, podemos aplicar una isometría de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ y suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = (1, \ldots, 0, 0)$. Así, los puntos de M satisfacen:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 1, \quad x_1 = \tau,$$

de modo que

$$x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 1 - \tau^2 < 0$$

que es la ecuación de la cuádrica en $\mathbb{R}_1^{n+2}$ correspondiente a un espacio hiperbólico (para detalles sobre estas cuádricas, ver [12]).

2. $\sigma = 0$. Para ver que M es isométrica a $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que $a = (1, 0, 0 \ldots, 1)$, de modo que los puntos de M^n satisfacen

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 1, \quad x_1 - x_{n+2} = \tau;$$

entonces

$$x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 - (x_1^2 - x_{n+2}^2) = 1 - \tau(x_1 + x_{n+2}).$$

Como $\tau \neq 0$, $x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ puede tomar cualquier valor en $[0, \infty)$. Esto dice que podemos utilizar $r = x_1 + x_{n+2}, x_2, \ldots, x_{n+1}$ como coordenadas esféricas (r es la distancia al origen y las demás coordenadas son ángulos adecuados) para establecer la isometría con $\mathbb{R}^n$.

3. $\sigma = -1$. La demostración de que M es isométrica a $\mathbb{S}^n(\sqrt{1+\tau^2})$ es similar a la del caso $\sigma = 1$.

Con este análisis concluye la demostración de la Proposición. ∎

Las hipersuperficies del último inciso son llamadas las esferas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Si $\tau \neq 0$, M es una esfera pequeña. Si $\tau = 0$, M es una esfera grande. Éstas son las únicas hipersuperficies compactas descritas en este ejemplo.

Ahora veremos algunas hipersuperficies completas con curvatura media constante que no son totalmente umbílicas.

Proposition 6 (Cilindros hiperbólicos; véase [10].). *Sea*

$$M^n = \left\{ \; x \in \mathbb{S}_1^{n+1} \; ; \; x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{n+2}^2 = -\operatorname{senh}^2 r \; \right\},$$

con $r > 0$ y $1 \leq k \leq n$. Entonces M tiene curvatura media constante y es isométrica al producto riemanniano $\mathbb{H}^k \times \mathbb{S}^{n-k}$ de un espacio hiperbólico y una esfera.

Proof. Sea $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) \in M$. Es fácil ver que

$$N(p) = \frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}\,(p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0, p_{n+2}) + (\tanh r)p$$

es un campo unitario tipo tiempo, normal a M. Por otro lado, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

$$\begin{aligned} S_p(X) &= -\bar{D}_X \left[\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}(p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0, p_{n+2}) + (\tanh r)p \right] \\ &= -\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}\bar{D}_X\left[(p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0, p_{n+2})\right] - (\tanh r)\bar{D}_X p. \end{aligned}$$

De esta manera, si se escoge

$$X_i = (0, \dots, 0, p_{n+2}, 0, \dots, 0, p_i)$$

con p_{n+2} en la i-ésima posición para $i = 1, \dots, k$, entonces

$$S_p(X_i) = -\left(\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r} + \tanh r\right) X_i = -(\coth r) X_i$$

mientras que si

$$Y_j = (0, \dots, 0, -p_{k+j}, 0, \dots, 0, p_{k+1}, 0, \dots, 0),$$

con $-p_{k+j}$ en la posición $k+1$ y p_{k+1} en la posición $k+j$ para $j = 1, \dots, n-k$, entonces

$$S_p(Y_j) = -(\tanh r)\ Y_j.$$

Esto implica que S_p tiene dos valores propios ($\coth r$ y $\tanh r$) con multiplicidades k y $n-k$, respectivamente, lo cual muestra que M no es umbílica. La curvatura media constante de M está dada por

$$nH = k \coth r + (n-k) \tanh r.$$

En particular, para $k = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{n^2} \left(\coth r + (n-1) \tanh r\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\coth^2 r + 2(n-1) + (n-1)^2 \tanh^2 r\right). \end{aligned}$$

Supongamos que $n > 2$. Si hacemos $\coth^2 r = n-1$ obtenemos

$$\frac{1}{n^2} \left((n-1) + 2(n-1) + (n-1)^2 \tanh^2 r\right) \geq \frac{4(n-1)}{n^2},$$

lo que implica que $H^2 \geq 4(n-1)/n^2$. Como $k = 1$ y $n > 2$, entonces H^2 asume todos los valores posibles en el intervalo $\left[4(n-1)/n^2, \infty\right)$.

Observemos que todo punto de M satisface

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{n+2}^2 = -\operatorname{senh}^2 r \tag{5}$$

$$x_{k+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \cosh^2 r. \tag{6}$$

Cada una de estas ecuaciones define un espacio hiperbólico $\mathbb{H}^k$ y una esfera $\mathbb{S}^{n-k}$, de modo que M es isométrica al producto de estas variedades. ∎

3. HIPERSUPERFICIES DE ROTACIÓN

En esta sección definimos las hipersuperficies de rotación tipo espacio en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ y estudiaremos éstas bajo la restricción de que su r-ésima curvatura media H_r sea constante. En la siguiente sección daremos parametrizaciones explícitas de las superficies de rotación hiperbólicas de tipo espacio en $\mathbb{S}_1^3$.

Una aplicación lineal $A : \mathbb{R}_1^{n+2} \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ es una transformación *ortogonal* de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ si $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2}$. Denotaremos el conjunto de transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ por $O(n+1,1)$. Si G es la matriz de la métrica de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ con respecto de alguna base, entonces

$$\begin{aligned} O(n+1,1) &= \left\{ \ A \mid (Ax)^t G(Ay) = x^t Gy \text{ para toda } x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2} \ \right\} \\ &= \left\{ \ A \mid A^t GA = G \ \right\} \end{aligned}$$

por lo que $(\det(A))^2 = 1$. Denotaremos por $SO(n+1,1)$ al subgrupo de $O(n+1,1)$ formado por las transformaciones ortogonales con determinante 1; es decir,

$$SO(n+1,1) = \{ \ A \in O(n+1,1) \mid \det A = 1 \ \} .$$

Definition 7. Sea P^k un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Decimos que P^k es *lorentziano* (resp. *riemanniano*, *degenerado*) si la restricción de la métrica de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ a P^k es una métrica de Lorentz (resp. riemanniana, degenerada).

Sean P^2, P^3 tales que $P^3 \supset P^2$ y C una curva regular tipo espacio en $\mathbb{S}_1^{n+1} \cap (P^3 \setminus P^2)$, parametrizada por longitud de arco. Sea G el subgrupo de $SO(n+1,1)$ que deja fijo a P^2 punto a punto; es decir,

$$G = \left\{ \ A \in SO(n+1,1) \mid Ax = x, \text{ para toda } x \in P^2 \ \right\} .$$

El conjunto

$$M = \left\{ \ y \in \mathbb{S}_1^{n+1} \mid y = Ax \text{ para toda } A \in G, x \in C \ \right\}$$

es la *órbita* de C bajo la acción de G. Esta órbita es una hipersuperficie tipo espacio *de rotación esférica* (resp. *hiperbólica*, *parabólica*) en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ generada por C, siempre que P^2 sea lorentziano (resp. riemanniano, degenerado).

Aquí analizaremos las hipersuperficies de rotación tipo espacio, hiperbólicas. Los casos esférico y parabólico se analizan de manera similar en [13].

En $\mathbb{R}_1^{n+2}$, sean $P^2 = \{ \ (0, \ldots, 0, x, y, 0)) \}$, $P^3 = \{ \ (0, \ldots, 0, x, y, \omega) \}$, con $x, y, \omega \in \mathbb{R}$. Sea

$$C_1(u) = (0, \ldots, 0, x(u), y(u), \omega(u)) ,$$

con $u \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, una curva en $P^3 \cap \mathbb{S}_1^{n+1}$ parametrizada por longitud de arco tal que

$$x^2(u) + y^2(u) - \omega^2(u) = 1 \tag{7}$$

y

$$x'^2(u) + y'^2(u) - \omega'^2(u) = 1. \tag{8}$$

Sea $\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con

$$\alpha_i = \alpha_i(t_1, \ldots, t_n), \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots - \alpha_n^2 = -1,$$

una parametrización ortogonal del espacio hiperbólico unitario. De aquí se sigue que

$$f(t_1, \ldots, t_{n-1}, u) = (\omega\alpha_1, \ldots, \omega\alpha_{n-1}, x, y, \omega\alpha_n) \tag{9}$$

es una parametrización de la hipersuperficie de rotación generada por la curva $x(u)$, $y(u)$ y $\omega(u)$ alrededor de P^2 en el caso hiperbólico.

Podemos usar la parametrización (9) para calcular las curvaturas principales de la hipersuperficie generada por la curva C_1, a saber,

$$k_i = \frac{\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\omega}, \qquad k_n = \frac{\omega'' + \omega}{\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{10}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Observemos que estas fórmulas son válidas siempre que se satisfagan

$$\omega > 0 \quad \text{y} \quad \omega'^2 \geq -\left(\omega^2 + 1\right)$$

Llamaremos "región relevante" al conjunto de parejas (ω, ω') que satisfacen estas desigualdades.

Ahora, si utilizamos la fórmula para la r-ésima curvatura media dada en (1), tenemos que

$$nH_r\omega^r = (n-r)\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{r}{2}} + r\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{r-2}{2}} \omega\left(\omega'' + \omega\right) \tag{11}$$

Una manera de estudiar estas hipersuperficies utiliza el hecho de que la ecuación anterior admite una primera integral. Para ver esto, multiplicamos por ω^{n-r-1} esta última ecuación, obteniendo

$$\begin{aligned} nH_r\omega^{n-1} = (n-r)\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{r}{2}} \omega^{n-r-1} \\ + r\left(\omega^2 + \omega'^2 + 1\right)^{\frac{r-2}{2}} \omega^{n-r}(\omega'' + \omega) \end{aligned}$$

Luego entonces,

$$(n-r)\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{r}{2}}\omega^{n-r-1} \\ +r\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{r}{2}-1}\omega^{n-r}(\omega''+\omega)-nH_r\omega^{n-1}=0$$

Esta ecuación diferencial puede ser escrita en la siguiente forma

$$\frac{d}{d\omega}\left[\omega^{n-r}\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]-nH_r\omega^{n-1}=0$$

la cual integramos con respecto a ω, suponiendo que H_r es constante. Así, la función

$$G_r(\omega,\omega')=\omega^{n-r}\left[\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{r}{2}}-H_r\omega^r\right] \tag{12}$$

es una primera integral de (11). Dada una solución ω de (11), la pareja (ω,ω') recorre una curva de nivel de la función

$$G_r(u,v)=u^{n-r}(u^2+v^2+1)^{\frac{r}{2}}-H_ru^r$$

con $u>0$ y $u^2+v^2+1\geq 0$. Podemos resumir esta discusión en el siguiente resultado.

Lemma 8. *(Véase [11]) Si ω es una solución de (11), el conjunto correspondiente de parejas ordenadas (ω,ω') está contenido en una componente conexa de una curva de nivel de G_r, dentro de la región relevante.*

Para el caso particular $n>r=1$ tenemos que $H_1=H$ es la curvatura media. La ecuación (12) toma la forma

$$G_1(\omega,\omega')=\omega^{n-1}\left[\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-H\omega\right] \tag{13}$$

La idea aquí es que las curvas de nivel de G_1 nos dan información sobre nuestras hipersuperficies. El análisis detallado se realiza en [13] y [14], de donde hemos extraido lo siguiente.

Es evidente que $G_1=0$ en los puntos del eje ω', y si $H\geq 0$, también en los puntos de la cónica

$$\omega^2(1-H^2)+\omega'^2=-1.$$

Para obtener los puntos críticos de G_1 calculamos

$$\frac{\partial G_1}{\partial\omega}=\omega^{n-2}\left[\frac{\omega^2}{(\omega^2+\omega'^2+1)^{\frac{1}{2}}}-H\omega+(n-1)\left(\left(\omega^2+\omega'^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-H\omega\right)\right]$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial\omega'}=\omega^{n-1}\left[\frac{\omega'}{(\omega^2+\omega'^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Cuando $\omega = 0$, los puntos críticos están en el eje ω'. Cuando $\omega' = 0$, los puntos críticos satisfacen la ecuación

$$\omega^2 - nH\omega\left(\omega^2+1\right)^{\frac{1}{2}} + (n-1)(\omega^2+1) = 0. \tag{14}$$

Los puntos críticos aquí obtenidos corresponden a los cilindros hiperbólicos de la Proposición 6, lo cual puede verse mostrando que la parametrización (9) satisface las ecuaciones (5) y (6) si $k = n+1$ y $\omega = \operatorname{senh} r$.

4. PARAMETRIZACIONES EXPLíCITAS

En esta sección utilizamos el método de Liu y Liu en [8] (véase también [11]) para dar una parametrización explícita de las superficies de rotación hiperbólica, tipo espacio y con curvatura media constante no nula en $\mathbb{S}^3_1$. Una superficie de rotación hiperbólica en $\mathbb{S}^3_1$ se obtiene al girar la curva C dada por $(x(u), y(u), 0, \omega(u))$, de modo que la hipersuperficie M está parametrizada mediante

$$r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\operatorname{senh}(v), \omega(u)\cosh(v)),$$

con $u \in I, v \in \mathbb{R}$. Las rotaciones correspondientes de $\mathbb{R}^4_1$ fijan un plano tipo espacio; en este caso, el plano xy.

La primera forma fundamental de M_1 es $du^2 + \omega(u)^2 dv^2$ y el campo

$$\begin{aligned} N_1(u,v) = (&y'(u)\omega(u) - \omega'(u)y(u), x'(u)\omega(u) - \omega'(u)x(u),\\ &(y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\operatorname{senh}(v), (y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\cosh(v)) \end{aligned}$$

es el campo vectorial unitario normal a M en $\mathbb{S}^3_1$. De las ecuaciones (10) obtenemos

$$2H\omega = \frac{-2\omega^2 - \omega\omega'' - \omega'^2 - 1}{(\omega^2 + \omega'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}};$$

es decir,

$$-2H\omega(\omega^2 + \omega'^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2\omega^2 + \omega\omega'' + \omega'^2 + 1$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\omega(u) > 0$. Si $\omega(u)$ no es constante, consideramos $\omega(u)^2 = \alpha(u) - \frac{1}{2}$, y sustituimos en la ecuación anterior. Como $\alpha' = 2\omega\omega'$ y $\alpha'' = 2\omega\omega'' + 2\omega'^2$, obtenemos:

$$\alpha'' + 4\alpha = -2H\left(4\alpha^2 - 1 + \alpha'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $\omega(u)$ no es constante, $\alpha \neq 0$. De aquí obtenemos:

$$\frac{\alpha'' + 4\alpha}{(4\alpha^2 - 1 + \alpha'^2)^{\frac{1}{2}}} = -2H$$

Integrando con respecto a α,

$$(\alpha'^2 + 4\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = -2H\alpha + a, \quad \text{con} \;\; a - 2H\alpha > 0,$$

donde a es la constante de integración. Simplificando esta expresión se obtiene

$$\alpha'^2 = a^2 - 4Ha\alpha + 4(H^2 - 1)\alpha^2 + 1. \tag{15}$$

Es posible resolver la ecuación (15) por casos, para obtener el siguiente resultado:

THEOREM 9. *(Véase [8].) Una superficie de rotación hiperbólica de tipo espacio en el espacio de De Sitter* $\mathbb{S}^3_1$ *es congruente a la superficie*

$$r(u, v) = (a \operatorname{sen}(u), a\cos(u), b \operatorname{senh}(v), b\cosh(v)),$$

donde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$ *y* a, b *son constantes reales; o bien a la superficie*

$$r(u, v) = (x(u), y(u), \omega(u)\operatorname{senh}(v), \omega(u)\cosh(v)),$$

donde $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$ *y*

$$\begin{aligned} x(u) &= (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi(u), \\ y(u) &= (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi(u), \end{aligned}$$

con

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\omega(t)^2 + \omega'(t)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\omega(t)^2 + 1)} dt.$$

donde

$$\omega(u) = \begin{cases} \left(\frac{H}{4a}(a^2 + 1 - 4a^2u^2) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{a^2-(H^2-1)}}{2(H^2-1)} \cosh(2\sqrt{H^2-1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{H^2-1-a^2}}{2(H^2-1)} \operatorname{senh}(2\sqrt{H^2-1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{a^2+1-H^2}}{2(H^2-1)} \operatorname{sen}(2\sqrt{1-H^2}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

dependiendo de que $a \neq 0$ *y* $H^2 = 1$; $a^2 > H^2 - 1 > 0$; $0 < a^2 < H^2 - 1$; *o* $H^2 - 1 < 0$, *respectivamente.*

5. ESTABILIDAD

En esta última sección presentamos la caracterización variacional de las hipersuperficies tipo espacio con curvatura media constante, para lo cual necesitamos las fórmulas para la primera y segunda variación del área, así como la definición de estabilidad.

5.1. El problema variacional

Para presentar nuestros resultados en forma adecuada, utilizaremos el punto de vista de las inmersiones. Sea $\bar{M}^{n+1}$ una variedad de Lorentz orientable y $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión de una variedad conexa, orientable, compacta, con frontera ∂M (posiblemente vacía). x es una inmersión tipo espacio si la métrica inducida en M mediante x es una métrica riemanniana.

Definition 10. $X : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \bar{M}$ es una *variación de x* si:

1. X es C^∞.
2. $X_t : M \to \bar{M}$ $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, definida por $p \longmapsto X(p,t)$, es una inmersión tipo espacio.
3. $X_0 = x$.
4. $X|_{\partial M} = x|_{\partial M}$.

Definition 11. La *función de área* de la variación $A : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$A(t) = \int_M dM_t,$$

donde dM_t es el elemento de volumen de M en la métrica inducida por X_t. La *función de volumen* $V : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$V(t) = \int_{M\times[0,t]} X^* d\bar{M}.$$

Para cada $p \in M$, consideremos la curva $X_p : I \to \bar{M}$, $t \mapsto X(p,t)$. El campo

$$W(p) = \left(\frac{\partial X_p}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0}$$

es el campo variacional de X. Denotemos $f = -\langle W, N\rangle$, donde N es el campo normal de la variedad M. Entonces tenemos

$$W = fN + \text{campo tangente}.$$

Definition 12. Una variación es *normal* si W es paralelo a N. La variación *preserva volumen* si $V(t) = V(0) = 0$, para todo t.

Para una variación dada X de una inmersión $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$, denotemos

$$H_0 = \frac{1}{A(0)} \int_M H dM,$$

donde $A(0) = A$.

Definamos el siguiente operador: $J : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, dado por

$$t \longmapsto J(t) = A(t) + nH_0 V(t) = A(t) + \frac{nV(t)}{A(0)} \int_M H dM.$$

Este operador es importante en el contexto de las hipersuperficies con curvatura media constante, debido a las propiedades ampliamente conocidas enunciadas en la siguiente Proposición, cuya demostración omitimos.

Proposition 13. *Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$una inmersión tipo espacio. Entonces son equivalentes:*

1.x tiene curvatura media constante igual a H_0;
2.Para cualquier variación X de x que preserva volumen tenemos que $A'(0) = 0$.
3.Para cualquier variación X de x, $J'(0) = 0$.

Ahora enunciaremos la importante fórmula de la segunda variación del operador $J(t)$. Ver [4], página 127.

Theorem 14. *Sea $x : M^n \to \bar{M}$ una inmersión tipo espacio con curvatura media constante H_0 y sea X una variación de x que preserva el volumen. Entonces $J''(0)$ depende solamente de f y está dada por*

$$J''(0)(f) = \int_M \left(f\Delta f - \|B\|^2 f^2 + \mathrm{Ricci}(N) f^2 \right) dM$$

donde Δ es el laplaciano en la métrica inducida, $\|B\|$ es la norma de la segunda forma fundamental de x, y $\mathrm{Ricci}(N)$ es la curvatura de Ricci (normalizada) de $\bar{M}$ en la dirección de N.

5.2. Estabilidad y campos de Jacobi

Utilizaremos el operador J para definir el concepto de estabilidad. Desde un punto de vista intuitivo, las hipersuperficies con curvatura media constante son puntos críticos del operador J, de manera similar al hecho que las superficies mínimas son puntos críticos del operador de área A definido anteriormente. En este segundo caso, la estabilidad se refiere a que las superficies realmente *minimicen* el área. En analogía con esta situación se define lo siguiente.

Definition 15. Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión tipo espacio con curvatura media constante. La inmersión x es *estable* si y sólo si $J'' \leq 0$ para toda variación de x que preserva el volumen. Si M no es compacta, diremos que x es *estable* si y sólo si para toda subvariedad con frontera $N \subset M$, la restricción $x|_N$ es estable.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$ con $f|_{\partial M} = 0$ y $\int_M f dM = 0$. Como en [3] y [4], se puede mostrar que una inmersión $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ es estable si y solamente si $J''(0)(f) \leq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Definimos la forma bilineal $I : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mediante

$$I(f, g) = \int_M g \left\{ \Delta f - \|B\|^2 f + \mathrm{Ricci}(N) f \right\} dM \tag{16}$$

y decimos que dada $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión con curvatura media constante, un campo vectorial normal $W = fN$, $f \in \mathcal{F}$, es un *campo de Jacobi* si y sólo si $f \in \ker I$.

La siguiente caracterización de los campos de Jacobi es fundamental (ver [3] y [4]): Si $f \in \mathcal{F}$, entonces fN es un campo de Jacobi si y sólo si

$$\Delta f + \left(\mathrm{Ricci}(N) - \|B\|^2 \right) f = c,$$

donde c es una constante.

5.3. Valores propios del laplaciano

Sea $f \in C^\infty(M)$. Definimos una norma en $C^\infty(M)$ por:

$$\|f\|_1 = \left(\int_M |f(x)|^2 + \int_M |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Al completar $C^\infty(M)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ obtenemos el llamado espacio de Sobolev, denotado por $L_1^2(M)$.

Sea M compacta con $\partial M = \varnothing$. Entonces el operador laplaciano Δ es un operador elíptico auto-adjunto en $L_1^2(M)$. Por la teoría espectral de los operadores auto-adjuntos, sabemos que Δ tiene valores propios discretos $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \to \infty$ y las correspondientes funciones propias $\{f_i\}$ que satisfacen $\Delta f_i = -\lambda_i f_i$, $f_i \in C^\infty(M) \cap L_1^2(M)$, pueden ser escogidas de tal manera que $\{f_i\}$ formen una base ortonormal de $L_1^2(M)$.

Si $\partial M = \varnothing$ y $H = \left\{ f \in L_1^2(M) : \int_M f = 0 \right\}$, Δ es un operador elíptico auto-adjunto en H, y podemos encontrar una base ortonormal $\{f_i\}$, con

$\Delta f_i = -\lambda_i f_i, \;\; f_i \in C^\infty(M) \cap H$, tal que

$$\lambda_1 = inf \left\{ \frac{\int |\nabla f|^2}{|f|^2} : f \in H \right\}$$

Para analizar la estabilidad de las hipersuperficies de rotación utilizaremos los siguientes resultados (para su demostración, ver [15]).

LEMMA 16. *El primer valor propio λ_1 de la esfera $\mathbb{S}^n$ está dado por $\lambda_1 = nk$, donde k es la curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$.*

Remark 17. Si x tiene curvatura media constante, entonces la fórmula de la segunda variación (16) se puede escribir

$$\begin{aligned} I(f,f) &= \int_M \left(f\Delta f - \|B\|^2 f^2 + nf^2 \right) dM \\ &= -\int_M \left\{ \|\mathrm{grad}\, f\|^2 + \left(\|B\|^2 - n \right) f^2 \right\} dM \end{aligned} \tag{17}$$

LEMMA 18. *Para cualquier inmersión tipo espacio tenemos*

$$\|B\|^2 - nH^2 \geq 0$$

La igualdad se da si y sólo si la inmersión es umbílica.

PROPOSITION 19. *Las esferas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ son estables.*

Proof. Consideremos una esfera M en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con curvatura media H. Como M es isométrica a una esfera euclidiana con curvatura seccional $1/(\tau^2+1)$, el Lema 16 implica que el primer valor propio del laplaciano de M es $\lambda_1 = n/(\tau^2+1)$. De la proposición 4, tenemos que $\mathrm{Ricci}(N) = n$, de modo que la segunda fórmula de variación está dada por

$$\begin{aligned} J''(0)(f) &= -\int_M \left\{ \|\mathrm{grad}\, f\|^2 + (\|B\|^2 - n) f^2 \right\} dM \\ &\leq -\int_M (\lambda_1 + nH^2 - n) f^2 dM \end{aligned}$$

Por el lema 18 se tiene $\|B\|^2 = nH^2 = \frac{n\tau^2}{\tau^2+1}$. Así,

$$\begin{aligned} J''(0)(f) \;&\leq\; -\int_M (\lambda_1 + nH^2 - n) f^2 dM \\ &=\; -\int_M \left(\frac{n}{\tau^2+1} + n\frac{\tau^2}{\tau^2+1} - n \right) f^2 dM = 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que la esfera $M \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ es estable. ▮

Concluiremos este artículo con un resultado original, mostrando la estabilidad de algunas superficies de rotación.

PROPOSITION 20. *Las superficies de rotación hiperbólica, tipo espacio y con curvatura media constante no nula $H^2 - 1 \geq 0$ en $\mathbb{S}_1^3$ son estables.*

Proof. Sabemos que si x es una inmersión tipo espacio con curvatura media constante, entonces la fórmula de la segunda variación está dada por

$$\begin{aligned} J''(0)(f) &= \int_M \left(f\Delta f - \|B\|^2 f^2 + nf^2 \right) dM \\ &= -\int_M \left\{ \|\operatorname{grad} f\|^2 + \left(\|B\|^2 - n \right) f^2 \right\} dM \end{aligned}$$

Por otro lado, el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de la inmersión de f está dado por:

$$\|B\|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = n\left((n-1)(\lambda - H)^2 + H^2\right),$$

donde

$$\mu = nH - (n-1)\lambda \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 1}}{\omega}.$$

Para ver que $J''(0)(f) \leq 0$, basta mostrar que $\|B\|^2 - n \geq 0$; pero

$$\begin{aligned} \|B\|^2 - n &= n(n-1)(\lambda - H)^2 + H^2 - n \\ &= n(n-1)(\lambda - H)^2 + H^2 - 1 \\ &= (n-1)(\lambda - H)^2 + (H^2 - 1) \end{aligned}$$

Por hipótesis, $H^2 - 1 \geq 0$, de modo que $\|B\|^2 - n \geq 0$ y las superficies son estables. ▮

REFERENCES

1. Akutagawa K. (1987) *On Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the De Sitter Space*, Math Z. 196-1, p. 13-19.
2. Aledo J. A. (1998) *Hipersuperficies Espaciales Completas de Curvatura Media Constante en el Espacio de De Sitter*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia.
3. Barbosa J. L., do Carmo M. P. (1984) *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math Z. 185-3, p. 339-353.

4. Barbosa J. L., do Carmo M. P., Eschenburg J. (1988) *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*, Math Z. 197-1, p. 123-138.
5. Barbosa J. L., Colares A. G. (1997) *Stability of Hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom. 15, p. 277-297.
6. Barbosa J. L., Oliker V. (1993) *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz Space*, Matemática Contemporânea 4, p. 27-44.
7. Goddard A. J. (1977) *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 82, p. 489-495.
8. Liu H., Liu G. (2000) *Hyperbolic Rotation Surfaces of Constant Mean Curvature en 3-De Sitter Space*, Bull. Belg. Math. Soc. 7, p. 455-466.
9. Marsden J. E., Tipler F. J. (1980) *Maximal Hypersurfaces and Foliations of Constant Mean Curvature in General Relativity*, Physics Reports 66 No. 3, p. 109-139.
10. Montiel S. (1988) *An Integral Inequality for Compact Spacelike Hypersurfaces in De Sitter Space and Applications*, Indiana University Mathematics Journal 37-4, p. 909-917.
11. Mori H. (1986) *Rotational Surfaces in a Pseudo-Riemannian 3-Sphere*, Tôhoku Math Journ. 38, p. 29-36.
12. O'Neill B. (1983) *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press.
13. Ortega M. A. (2004) *Hipersuperficies Tipo Espacio con Curvatura Media Constante en los Espacios de Lorentz*, Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
14. Palmas O. (1999) *Complete Rotation Hypersurfaces with H_k Constant in Space Forms*, Bol. Soc. Bras. Mat. 30, p. 139-161.
15. Spivak, M. (1975) *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc.