Álgebra tensorial

Oscar Palmas

16 de mayo de 2017

Estas notas son un complemento para el curso de Álgebra Lineal II de la Facultad de Ciencias, UNAM. Por supuesto, el tema es cubierto con profundidad en diversos libros, algunos de los cuales aparecen en la bibliografía al final.

1. Transformaciones multilineales

Definición 1.1. Sean $V_1,\dots,V_k,W$ espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Una transformación $T : V_1\times\cdots\times V_k \to W$ es *multilineal*, o más precisamente *k-lineal*, si para cada $i = 1,\dots,k$, y cualesquiera $v_i, w_i \in V_i$, $\lambda\in\mathbb{K}$ se tiene

$$T(v_1,\dots,\lambda v_i + w_i,\dots,v_k) = \lambda T(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k) + T(v_1,\dots,w_i,\dots,v_k)$$

Es fácil convencerse de que dados $V_1,\dots,V_k,W$, entonces el conjunto de transformaciones multilineales de $V_1\times\cdots\times V_k$ en W es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En realidad, aquí sólo consideraremos el caso en que $W=\mathbb{K}$ y los espacios vectoriales $V_1,\dots,V_k$ son o bien un espacio vectorial fijo V o su dual V^*. Además y por conveniencia, colocaremos al principio los factores duales.

Definición 1.2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y sean r,s enteros no negativos. Un *tensor de tipo* (r,s) en un espacio vectorial V es una transformación multilineal $T:(V^*)^r\times V^s\to\mathbb{K}$. Denotamos al conjunto de tensores de tipo (r,s) por $\mathscr{T}_s^{\,r}(V)$. Como definición especial, un *tensor de tipo* $(0,0)$ es un elemento del campo; en otras palabras, $\mathscr{T}_0^{\,0}(V)=\mathbb{K}$.

Es fácil ver que $\mathscr{T}_s^{\,r}(V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas de manera natural.

Ejemplo 1.3. Un tensor de tipo $(0,1)$ en V es una transformación lineal $T:V\to\mathbb{K}$; es decir, $\mathscr{T}_1^{\,0}(V)=V^*$. En este caso se habla de un *vector covariante*. En general, un tensor de tipo $(0,s)$ es un *tensor covariante*.

Ejemplo 1.4. Un tensor de tipo $(1,0)$ en V es una transformación lineal $T:V^*\to\mathbb{K}$, de modo que $\mathscr{T}_0^{\,1}(V)=V^{**}$, el doble dual de V. Como sabemos, existe una *inclusión* $i:V\to V^{**}$ que a cada $v\in V$ le asocia la transformación $i_v:V^*\to\mathbb{K}$ dada por $i_v(\theta)=\theta(v)$. En el caso de que V tenga dimensión finita, i es un isomorfismo y podemos identificar cada $v\in V$ con su imagen $i_v\in\mathscr{T}_0^{\,1}(V)$. Así, podemos cometer un cierto abuso de notación y escribir $v:V^*\to\mathbb{K}$ dada por $v(\theta)=\theta(v)$. Un tensor de este tipo también se conoce como un *vector contravariante*. En general, un tensor de tipo $(r,0)$ es un *tensor contravariante*.

Ejemplo 1.5. Cuando r y s son diferentes de cero, hablamos de un *tensor mixto*. Un ejemplo de este tipo es la *evaluación* $\mathrm{ev} \in \mathscr{T}_1^1(V)$ dada por $\mathrm{ev}(\theta, v) = \theta(v)$.

Observación 1.6. Notemos que, en el caso en que V tenga dimensión finita, $\mathscr{T}_s^r(V^*)$ es isomorfo a $\mathscr{T}_r^s(V)$.

> De ahora en adelante:
>
> 1. V denotará un espacio vectorial de dimensión finita n;
> 2. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ será una base de V;
> 3. $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ será la *base dual* de V^* asociada a la base anterior, definida por $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$.

Como en el caso de las transformaciones lineales, veremos que cada elemento de $\mathscr{T}_s^r(V)$ queda determinado por sus valores en unas bases dadas de V y V^*: Sean $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$, $\theta^1, \ldots, \theta^r \in V^*$ y $v_1, \ldots, v_s \in V$. Usando las bases mencionadas en el recuadro, podemos escribir

$$\theta^p = \sum_{i=1}^{n} a_i^p \omega^i; \qquad v_q = \sum_{j=1}^{n} b_q^j e_j;$$

donde $p = 1, \ldots, r$ y $q = 1, \ldots, s$. Sean

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = T(\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}), \qquad 1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \le n; \tag{1}$$

estos coeficientes se llaman los *componentes* de T respecto de la base dada de V y de la base dual correspondiente.

Entonces

$$T(\theta^1, \ldots, \theta^r, v_1, \ldots, v_s) = \sum T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} a^1_{i_1} \cdots a^r_{i_r} b^{j_1}_1 \cdots b^{j_s}_s, \tag{2}$$

donde la suma se realiza variando todos los índices $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ desde 1 hasta n.

Observación 1.7. Algunos de los lectores ya estarán acostumbrados a la llamada *convención de Einstein* para la suma, que consiste en eliminar el símbolo Σ, entendiendo que en una expresión como (2) se sumará sobre aquellos índices que aparezcan a la vez como subíndices y como superíndices. En estas notas conservaré el símbolo de la suma para mayor claridad, aunque las expresiones serán válidas eliminando el símbolo y respetando tal convención.

¿Qué ocurre con los componentes de un tensor al cambiar la base de V (y su base dual correspondiente)? Digamos que $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ es otra base de V, mientras que $\{\widetilde{\omega}^1, \dots, \widetilde{\omega}^n\}$ es su base dual correspondiente. Sabemos que existe la matriz de cambio de base $A = (A^j_{j'})$, de modo que

$$\widetilde{e}_{j'} = \sum_{j=1}^{n} A^j_{j'} e_j, \tag{3}$$

También tenemos la matriz de cambio de base $B = (B^{i'}_i)$ tal que

$$\widetilde{\omega}^{i'} = \sum_{i=1}^{n} B^{i'}_i \omega^i;$$

pero observemos/recordemos que B es precisamente A^{-1}:

$$\delta^{i'}_{j'} = \widetilde{\omega}^{i'}(\widetilde{e}_{j'}) = \sum_{i,j=1}^{n} B^{i'}_i A^j_{j'} \omega^i(e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} B^{i'}_i A^j_{j'} \delta^i_j = \sum_{k=1}^{n} B^{i'}_k A^k_{j'},$$

de modo que mejor escribiremos la penúltima ecuación como

$$\widetilde{\omega}^{i'} = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})^{i'}_i \omega^i; \tag{4}$$

Si $T \in \mathscr{T}^0_1(V)$, es decir, $T : V \to \mathbb{K}$, usamos (3) para ver que sus componentes con respecto de cada base están relacionados como sigue:

$$\widetilde{T}_{j'} = T(\widetilde{e}_{j'}) = T\left(\sum_{j=1}^{n} A^j_{j'} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} A^j_{j'} T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} A^j_{j'} T_j.$$

En otro ejemplo, si $T \in \mathscr{T}^1_0(V)$, entonces $T : V^* \to \mathbb{K}$ y de (4) tenemos que

$$\widetilde{T}^{i'} = T(\widetilde{\omega}^{i'}) = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})^{i'}_i T(\omega^i) = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})^{i'}_i T^i$$

Como último ejemplo antes del caso general, consideremos $T \in \mathscr{T}^1_1(V)$. Si

$$T^i_j = T(\omega^i, e_j) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{T}^{i'}_{j'} = T(\widetilde{\omega}^{i'}, \widetilde{e}_{j'}),$$

usando las ecuaciones (3) y (4), tenemos que

$$\widetilde{T}^{i'}_{j'} = \sum_{i,j=1}^{n} (A^{-1})^{i'}_i A^j_{j'} T^i_j.$$

Proposición 1.8 (Transformación de componentes de un tensor)**.** *Si $T \in \mathscr{T}^r_s(V)$ tiene componentes*

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = T(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$$

y

$$\widetilde{T}^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s} = T(\widetilde{\omega}^{i'_1}, \dots, \widetilde{\omega}^{i'_r}, \widetilde{e}_{j'_1}, \dots, \widetilde{e}_{j'_s}),$$

con respecto de las bases definidas antes de esta proposición, entonces

$$\widetilde{T}^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s} = \sum (A^{-1})^{i'_1}_{i_1}\cdots(A^{-1})^{i'_r}_{i_r} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_s}_{j'_s} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}, \tag{5}$$

donde la suma se realiza variando los índices $i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s$ *de* 1 *a* n.

Observación 1.9. Es una práctica común *definir* un tensor por medio de sus componentes, pidiendo que estos se transformen de acuerdo con la ecuación (5). Como hemos visto, los componentes de un tensor se obtienen con referencia a una base, de modo que podemos decir que en estas notas hemos preferido definir a los tensores de una manera *libre de coordenadas*.

Ejercicio 1.10. Sea $T \in \mathscr{T}^1_1(V)$ un tensor que tiene las mismas componentes con respecto de cualquier base. Muestre que existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $T^i_j = c\delta^i_j$.

Ejercicio 1.11. Sea $T \in \mathscr{T}^r_s(V)$ un tensor que tiene las mismas componentes con respecto de cualquier base. Muestre que $T = 0$ o bien $r = s$.

Ejercicio 1.12. Pruebe que si los componentes de un tensor $T \in \mathscr{T}^0_2(V)$ satisfacen $T_{ij} = T_{ji}$ (o bien $T_{ij} = -T_{ji}$) con respecto de una base, entonces satisfacen la misma condición con respecto de cualquier base.

2. Bases y dimensión de $\mathscr{T}^r_s(V)$

Como V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces es de esperar que cada $\mathscr{T}^r_s(V)$ también lo sea. Esto es cierto y de hecho no es complicado dar una base explícita para este espacio; con este fin definiremos una operación que nos permite obtener nuevos tensores a partir de otros.

Definición 2.1. Sean $T_1 \in \mathscr{T}^{r_1}_{s_1}(V)$ y $T_2 \in \mathscr{T}^{r_2}_{s_2}(V)$. Definimos el *producto tensorial* de T_1 y T_2 como la transformación $T_1 \otimes T_2 \in \mathscr{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ dada por

$$\begin{aligned} T_1 \otimes T_2(\theta^1,\ldots,\theta^{r_1+r_2},v_1,\ldots,v_{s_1+s_2}) \\ = T(\theta^1,\ldots,\theta^{r_1},v_1,\ldots,v_{s_1})\,T_2(\theta^{r_1+1},\ldots,\theta^{r_1+r_2},v_{s_1+1},\ldots,v_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Muestre que para cualesquiera tensores T_1, T_2, T_3 y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, se tiene que

1. $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$; por tanto, por un argumento de inducción, podemos escribir un producto $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ sin necesidad de paréntesis.

2. $(a_1 T_1 + a_2 T_2) \otimes T_3 = a_1 T_1 \otimes T_3 + a_2 T_2 \otimes T_3$.

3. $T_3 \otimes (a_1 T_1 + a_2 T_2) = a_1 T_3 \otimes T_1 + a_2 T_3 \otimes T_2$.

Ejercicio 2.3. Muestre que los componentes de un producto tensorial son el producto de los componentes de sus factores; en forma explícita, si $T_1 \in \mathscr{T}_{s_1}^{r_1}(V)$ y $T_2 \in \mathscr{T}_{s_2}^{r_2}(V)$, muestre que

$$(T_1 \otimes T_2)_{j_1 \cdots j_{(s_1+s_2)}}^{i_1 \cdots i_{(r_1+r_2)}} = (T_1)_{j_1 \cdots j_{s_1}}^{i_1 \cdots i_{r_1}} \, (T_2)_{j_{(s_1+1)} \cdots j_{(s_1+s_2)}}^{i_{(r_1+1)} \cdots i_{(r_1+r_2)}}.$$

Como antes, veamos unos ejemplos de cómo producir bases para los espacios de tensores mediante este producto tensorial, antes de pasar al caso general.

Ejemplo 2.4. Evaluemos los productos tensoriales de los elementos de la base dual $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ en los elementos de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$\omega^{k_1} \otimes \omega^{k_2}(e_{j_1}, e_{j_2}) = \omega^{k_1}(e_{j_1})\omega^{k_2}(e_{j_2}) = \delta_{j_1}^{k_1}\delta_{j_2}^{k_2}.$$

Ahora bien, si

$$v_1 = \sum_{j_1=1}^{n} b_1^{j_1} e_{j_1} \quad \text{y} \quad v_2 = \sum_{j_2=1}^{n} b_1^{j_2} e_{j_2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \omega^{k_1} \otimes \omega^{k_2}(v_1, v_2) &= \omega^{k_1}\left(\sum_{j_1=1}^{n} b_1^{j_1} e_{j_1}\right)\omega^{k_2}\left(\sum_{j_2=1}^{n} b_1^{j_2} e_{j_2}\right) \\ &= \sum_{j_1, j_2=1}^{n} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \delta_{j_1}^{k_1} \delta_{j_2}^{k_2} = b_1^{k_1} b_2^{k_2} \end{aligned}$$

para cualesquiera $k_1, k_2 = 1, \ldots, n$. Si $T \in \mathscr{T}_2^0(V)$, tenemos que

$$T(v_1, v_2) = \sum_{j_1, j_2=1}^{n} T_{j_1 j_2} b_1^{j_1} b_2^{j_2},$$

lo que podemos escribir como

$$T(v_1, v_2) = \sum_{j_1, j_2=1}^{n} T_{j_1 j_2} \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2}(v_1, v_2),$$

o de forma más breve,

$$T = \sum_{j_1, j_2=1}^{n} T_{j_1 j_2} \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2}.$$

Esto muestra que el conjunto

$$\{\omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} : 1 \le j_1, j_2 \le n\}$$

genera a $\mathscr{T}_2^0(V)$. Veamos que también es un conjunto linealmente independiente: Si consideramos una combinación lineal

$$\sum_{j_1, j_2=1}^{n} a_{j_1 j_2} \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} = 0,$$

esto quiere decir que al evaluar esto en cualquier pareja (v_1, v_2) obtendremos un cero. En particular, al evaluar en (e_{k_1}, e_{k_2}), tenemos

$$0 = \sum_{j_1, j_2=1}^{n} a_{j_1 j_2} \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2}(e_{k_1}, e_{k_2}) = \sum_{j_1, j_2=1}^{n} a_{j_1 j_2} \delta^{j_1}_{k_1} \delta^{j_2}_{k_2} = a_{k_1 k_2},$$

lo que implica la independencia lineal de los $\omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2}$; por tanto, forman una base de $\mathscr{T}_2^0(V)$.

Ejemplo 2.5. Analicemos ahora el espacio de tensores mixtos $\mathscr{T}_1^1(V)$. Consideremos los productos tensoriales

$$\{e_{i_1} \otimes \omega^{j_1} : 1 \le i_1, j_1 \le n\}; \tag{6}$$

definidos por $e_{i_1} \otimes \omega^{j_1}(\theta, v) = e_{i_1}(\theta)\omega^{j_1}(v)$ (recordando nuestro abuso de notación). En particular, al evaluar en (ω^{k_1}, e_{l_1}), tenemos

$$e_{i_1} \otimes \omega^{j_1}(\omega^{k_1}, e_{l_1}) = e_{i_1}(\omega^{k_1})\omega^{j_1}(e_{l_1}) = \delta^{k_1}_{i_1} \delta^{j_1}_{l_1}$$

para cualesquiera k_1, k_2.

Ejercicio 2.6. Antes de revisar el siguiente resultado, intente mostrar que el conjunto dado en (6) es una base de $\mathscr{T}_1^1(V)$.

Teorema 2.7. *El conjunto de productos tensoriales*

$$\{\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s} \,:\, 1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_2 \le n \,\}$$

es una base de $\mathscr{T}_s^r(V)$. De hecho, cada $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$ se expresa como

$$T = \sum T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}, \tag{7}$$

donde

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = T(\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s})$$

y la suma se realiza variando los índices $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ de 1 *a n.*

Demostración. Primero mostraremos la segunda afirmación, es decir, que cada $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$ tiene la expresión indicada. Sean

$$\theta^p = \sum_{i=1}^{n} a^p_i \omega^i; \qquad v_q = \sum_{j=1}^{n} b^j_q e_j;$$

donde $p = 1, \ldots, r$ y $q = 1, \ldots, s$. Evaluando el lado derecho de (7), tenemos

$$\begin{aligned}
&\sum T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}(\theta^1, \ldots, \theta^r, v_1, \ldots, v_s) \\
&\qquad = \sum T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\, e_{i_1}(\theta^1) \cdots e_{i_r}(\theta^r) \omega^{j_1}(v_1) \cdots \omega^{j_s}(v_s) \\
&\qquad\qquad = \sum T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\, a^1_{i_1} \cdots a^r_{i_r} b^{j_1}_1 \cdots b^{j_s}_s = T(\theta^1, \ldots, \theta^r, v_1, \ldots, v_s),
\end{aligned}$$

lo que prueba que estos productos tensoriales generan a $\mathscr{T}_s^{\,r}(V)$. Para probar su independencia lineal, consideremos una combinación

$$\sum a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}=0;$$

al evaluar lo anterior en $(\omega^{k_1},\dots,\omega^{k_r},e_{l_1},\dots,e_{l_s})$, obtenemos

$$0=\sum a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\,\delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_r}_{i_r}\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_s}_{l_s}=a^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$$

para cualesquiera $k_1,\dots,k_r,l_1,\dots,l_2=1,\dots,n$, de modo que los productos tensoriales considerados son linealmente independientes. □

Corolario 2.8. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n, entonces*

$$\dim\mathscr{T}_s^{\,r}(V)=n^{r+s}.$$

Ejercicio 2.9. Muestre que si $v,w\in V$ son linealmente independientes, entonces $v\otimes w\neq w\otimes v$. Esto muestra que en general el producto tensorial no es conmutativo.

Ejercicio 2.10. Aunque en el teorema 2.7 mostramos que cualquier tensor se puede expresar como una combinación lineal de productos tensoriales, esto *no* implica que todo tensor sea un producto tensorial. Dé un ejemplo.

3. Interpretaciones y contracciones

De la manera en que hemos definido los tensores, estos son *funciones*; es decir, toman valores en el campo $\mathbb{K}$ asociado al espacio vectorial V. Sin embargo, en varios contextos surgen transformaciones importantes que no necesariamente asumen valores en el campo y que pueden asociarse o *interpretarse* en términos de un tensor.

Por ejemplo, consideremos una transformación lineal $L:V\to V$. Podemos asociar a L un tensor $\widetilde{L}\in\mathscr{T}_1^{\,1}(V)$ de la manera siguiente:

$$\widetilde{L}(\theta,v)=\theta(L(v)).$$

Por otro lado, dados $\widetilde{L}\in\mathscr{T}_1^{\,1}(V)$ y $v\in V$,

$$\theta\longmapsto\widetilde{L}(\theta,v)$$

define un elemento de V^{**}. Recordando el isomorfismo $i:V\to V^{**}$, existe un único $w\in V$ tal que $i_w(\theta)=\widetilde{L}(\theta,v)$ (o con nuestro abuso de notación, $w(\theta)=\widetilde{L}(\theta,v)$); por último, definimos $L(v)=w$.

Ejercicio 3.1. Con base en lo anterior, muestre que $\mathscr{T}_1^{\,1}(V)$ es isomorfo a $L(V,V)$, el espacio de transformaciones lineales de V en V. Construya un razonamiento análogo para ver que $\mathscr{T}_1^{\,1}(V)$ también es isomorfo a $L(V^*,V^*)$.

Ejercicio 3.2. Encuentre una interpretación tensorial para cada uno de los espacios de transformaciones lineales $L(V^*, V)$, $L(V, V^*)$ y $L(V^s, V)$; en otras palabras, muestre que cada uno de ellos es isomorfo a algún $\mathscr{T}_s^r(V)$.

Recordemos que dada una transformación lineal $L\colon V \to V$, ésta tiene asociados ciertos números *invariantes* que no dependen de su expresión con respecto de una base particular. Los más conocidos son su traza y su determinante, que se pueden expresar directamente en términos de los componentes del tensor asociado.

Proposición 3.3. *Si $T \in \mathscr{T}_1^1(V)$, el número*

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^i$$

es un invariante de T; es decir, no depende de la base elegida para calcular los componentes de T. Este número se llama la traza *de T.*

Demostración. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ bases de V, relacionadas mediante (3). Consideramos también sus bases duales $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ y $\{\widetilde{\omega}^1, \dots, \widetilde{\omega}^n\}$, relacionadas mediante (4). Sean T_j^i y $\widetilde{T}_{j'}^{i'}$ los componentes de T con respecto de estas bases. Entonces, por la Proposición 1.8,

$$\begin{aligned}
\sum_{i'=1}^{n} \widetilde{T}_{i'}^{i'} &= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} (A^{-1})_i^{i'} A_{i'}^j T_j^i = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{i'=1}^{n} (A^{-1})_i^{i'} A_{i'}^j \right) T_j^i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \delta_i^j T_j^i = \sum_{i=1}^{n} T_i^i,
\end{aligned}$$

lo que muestra que la expresión no depende de la base elegida. □

Otra manera de caracterizar a la traza es la siguiente.

Proposición 3.4. *Existe una única transformación lineal $\mathbf{C} : \mathscr{T}_1^1(V) \to \mathbb{K}$ tal que $\mathbf{C}(v \otimes \theta) = \theta(v)$ para todo $v \in V$ y $\theta \in V^*$.*

Demostración. Dado $T \in \mathscr{T}_1^1(V)$, por la ecuación (7) sabemos que

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T_j^i \, e_i \otimes \omega^j$$

y por las condiciones sobre $\mathbf{C}$ debe ocurrir que

$$\mathbf{C}(T) = \sum_{i,j=1}^{n} T_j^i \, \mathbf{C}(e_i \otimes \omega^j) = \sum_{i,j=1}^{n} T_j^i \, \omega^j(e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} T_j^i \, \delta_i^j = \sum_{i=1}^{n} T_i^i;$$

por la proposición 3.3, esta expresión no depende de la base elegida. □

Más adelante mostraremos que el determinante también es un invariante asociado a un tensor. Por el momento extenderemos la transformación $\mathbf{C}$ de la proposición anterior para obtener una operación que lleva tensores de orden (r, s) en tensores de orden $(r-1, s-1)$, llamada *contracción*. La idea es simplemente elegir índices $p \in \{1, \dots, r\}$ y $q \in \{1, \dots, s\}$ y aplicar la transformación $\mathbf{C}$ en los "espacios" seleccionados. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5. Si $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$, $p \in \{1, \dots, r\}$ y $q \in \{1, \dots, s\}$, la *contracción* $\mathbf{C}_q^p T$ es el tensor en $\mathscr{T}_{s-1}^{r-1}(V)$ cuyo valor en $(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1})$ es la contracción $\mathbf{C}$ del tensor de orden $(1,1)$ dado por

$$S(\theta, v) = T(\theta^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ p}}{\theta}, \dots, \theta^{r-1}, v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{v}, \dots, v_{s-1}).$$

En términos de las bases de V y V^*,

$$\mathbf{C}(S) = \sum_{k=1}^n S_k^k = \sum_{k=1}^n S(\omega^k, e_k),$$

de modo que

$$\mathbf{C}_q^p T(\theta^1, \dots, \theta^{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) = \sum_{k=1}^n T(\theta^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ p}}{\omega^k}, \dots, \theta^{r-1}, v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{e_k}, \dots, v_{s-1}).$$

De esta expresión también podemos calcular los componentes de $\mathbf{C}_q^p T$ en términos de los de T:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C}_q^p T)_{j_1 \cdots j_{s-1}}^{i_1 \cdots i_{r-1}} &= \mathbf{C}_q^p T(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_{r-1}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{s-1}}) \\
&= \sum_{k=1}^n T(\omega^{i_1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ p}}{\omega^k}, \dots, \omega^{i_{r-1}}, e_{j_1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{e_k}, \dots, e_{j_{s-1}}) = \sum_{k=1}^n T_{j_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{k} \cdots j_{s-1}}^{i_1 \cdots \overset{\substack{p \\ \downarrow}}{k} \cdots i_{r-1}}.
\end{aligned}$$

4. La danza de los índices

El nombre de esta sección está inspirado en el nombre de la sección *The debauch of indices* del libro [5], título que podría traducirse como *La seducción de los índices*. Otra aclaración previa es que en esta sección consideraremos sólo el caso en que el campo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Como sabemos, en general no existe un isomorfismo canónico entre un espacio vectorial V y su dual V^*. Esto trae como consecuencia que, en general, no exista una forma de identificar los tensores covariantes con los contravariantes. Sin embargo, si dotamos al espacio V de un producto escalar, entonces podemos definir un isomorfismo adecuado. Recordemos que un *producto escalar* en un espacio vectorial V es un tensor $g \in \mathscr{T}_2^0(V)$ simétrico y positivo-definido.

Observación 4.1. Podríamos extender nuestra definición de producto escalar admitiendo que en vez de que sea positivo-definido fuese no degenerado, pero por el momento sólo consideraremos el primer caso.

Observación 4.2. Aunque en ocasiones es usual denotar al producto por $\langle , \rangle$, usaremos la letra g justamente para poder manipular mejor los índices de nuestros tensores.

Ejercicio 4.3. Muestre que la matriz G con las componentes del tensor g, es decir, $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, es invertible. Denotamos por g^{ij} las entradas de G^{-1}.

Proposición 4.4. *Sea V un espacio vectorial con un producto escalar g. Dado $v \in V$, definimos $T_v : V \to \mathbb{K}$ por*

$$T_v(w) = g(v, w).$$

Entonces la transformación $v \mapsto T_v$ es un isomorfismo de V sobre V^*.

Demostración. Dejaremos como ejercicio mostrar que $T_v \in V^*$ y que la transformación es lineal. Para ver que es inyectiva, supongamos que $v_1, v_2 \in V$ cumplen que $T_{v_1} = T_{v_2}$, lo cual implica que $g(v_1, w) = g(v_2, w)$ para todo $w \in V$. Como g es un producto escalar, tenemos que $v_1 = v_2$.

Para ver que la transformación es suprayectiva, debemos ver que para cada $T \in V^*$ existe $v \in V$ tal que $T = T_v$. Escribamos

$$v = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j \qquad \text{y} \qquad T = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega^i.$$

¿Cuál debe ser la relación entre los componentes b^j y a_i? Si suponemos que $T = T_v$, entonces

$$a_i = T(e_i) = T_v(e_i) = g(v, e_i) = \sum_{j=1} b^j g(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} b^j g_{ji}.$$

Haciendo uso de la matriz G^{-1}, tenemos

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{ij};$$

en otras palabras, el vector v con estos componentes cumple que $T = T_v$. □

Aunque es probable que los lectores ya conocieran una demostración de la proposición anterior, realizamos los cálculos por una razón adicional. Este procedimiento muestra la forma de traducir un tensor contravariante $v \in V = V^{**} = \mathscr{T}_0^1(V)$ en un tensor covariante $T_v \in \mathscr{T}_1^0(V)$ y viceversa: La idea básica es multiplicar por g_{ij} (o por g^{ij}, según el caso) y *hacer una contracción*.

Para reforzar esta idea, denotemos los componentes de v por T^j y los de T_v por T_i. Obsérvese que no hay posibilidad de confusión entre estas notaciones, por el uso de subíndices y superíndices. Las relaciones obtenidas entre los componentes se ven ahora como

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} T^j g_{ji} \qquad \text{y} \qquad T^j = \sum_{i=1}^{n} T_i g^{ij}.$$

Como ya es costumbre en estas notas, haremos un ejemplo más en dimensión baja antes de enunciar el caso general.

Sea $T \in \mathscr{T}_1^2(V)$; es decir, $T : V^* \times V^* \times V \to \mathbb{K}$, con componentes

$$T_{j_1}^{i_1 i_2} = T(\omega^{i_1}, \omega^{i_2}, e_{j_1}).$$

Gracias a nuestro isomorfismo entre V y V^*, podemos obtener a partir de T tensores en cualquier $\mathscr{T}_s^r(V)$ siempre que $r + s = 3$ y sin temor a la confusión, podemos denotar a *todos ellos* con la misma letra T, distinguiéndolos mediante sus componentes. Por ejemplo, podemos obtener un tensor en $\mathscr{T}_2^1(V)$, $T : V^* \times V \times V \to \mathbb{K}$, con componentes

$$T_{j_1 j_2}^{i_1} = \sum_{i_2=1}^{n} T_{j_1}^{i_1 i_2} g_{i_2 j_2},$$

otro tensor en $\mathscr{T}_0^3(V)$, $T : V^* \times V^* \times V^* \to \mathbb{K}$, con componentes

$$T^{i_1 i_2 i_3} = \sum_{j_1=1}^{n} T_{j_1}^{i_1 i_2} g^{i_3 j_1},$$

y así sucesivamente. Obsérvese que en este caso es de gran utilidad trabajar con los componentes del tensor, pues aparentemente sólo estamos *subiendo o bajando* los índices.

Proposición 4.5. *Sean V un espacio vectorial con un producto escalar g y $T \in \mathscr{T}_s^r(V)$ un tensor con coeficientes*

$$T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} = T(\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}).$$

Sean $p \in \{1, \ldots, r\}$ y $q \in \{1, \ldots, s\}$. El isomorfismo entre V y V^* inducido por g permite bajar el índice del lugar p *y definir un tensor $T \in \mathscr{T}_{s+1}^{r-1}(V)$ con componentes*

$$T_{j_1 \cdots j_s j_{s+1}}^{i_1 \cdots \widehat{i_p} \cdots i_r} = \sum_{i_p=1}^{n} T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_p \cdots i_r} g_{i_p j_{s+1}},$$

donde el símbolo $\widehat{\ }$ indica que el índice ha sido omitido. De manera análoga, se puede subir el índice del lugar q *y definir un tensor $T \in \mathscr{T}_{s-1}^{r+1}(V)$ con componentes*

$$T_{j_1 \cdots \widehat{j_q} \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r i_{r+1}} = \sum_{j_q=1}^{n} T_{j_1 \cdots j_q \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} g^{j_q i_{r+1}}.$$

Ejercicio 4.6. Demuestre la proposición anterior.

5. Tensores covariantes

El lector podrá intuir que en muchos casos podremos traducir el estudio de los tensores mixtos en el estudio de tensores de un solo tipo, es decir, podremos estudiar el espacio de aquellos tensores que sólo son covariantes o el espacio de los tensores contravariantes. A partir de ahora, nos fijaremos sólo en el espacio $\mathscr{T}_s^0(V)$ de los s-tensores covariantes; es decir, en el espacio de las transformaciones s-lineales

$T: V^s \to \mathbb{K}$. También de ahora en adelante usaremos la notación $\mathscr{T}^s(V^*)$ para este espacio (recuerde o vea la observación 1.6). La razón principal para utilizar esta notación es que pronto daremos una mayor importancia al espacio dual V^*.

Antes de definir dos subconjuntos importantes de $\mathscr{T}^s(V^*)$, necesitamos hacer un breve recordatorio: Si m es un número natural, denotamos por Σ_m al conjunto de permutaciones de $\{1,\dots,m\}$. Toda permutación $\sigma \in \Sigma_m$ es producto (o composición) de *transposiciones*, cuyo número puede variar pero cuya paridad es fija para cada σ. Así, se dice que una permutación es *par* o *impar* si es el producto de un número par o impar de transposiciones. Además, se define el *signo* de una permutación como $\operatorname{signo}(\sigma) = +1$ si σ es par y $\operatorname{signo}(\sigma) = -1$ si σ es impar.

Sea $T \in \mathscr{T}^s(V^*)$ y $\sigma \in \Sigma_s$. Definimos un nuevo tensor $T^\sigma \in \mathscr{T}^s(V^*)$ por

$$T^\sigma(v_1,\dots,v_s) = T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(s)}).$$

Ahora sí, estamos listos para una definición.

Definición 5.1. Sea $T \in \mathscr{T}^s(V^*)$.

1. Si $s \geq 2$, T es un tensor *simétrico* si y sólo si

   $$T(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_s) = T(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_s)$$

   para cualesquiera $i, j \in \{1,\dots,s\}$. En forma equivalente,

   $$T^\sigma = T \quad \text{para toda } \sigma \in \Sigma_s.$$

2. Si $s \geq 2$, T es un tensor *alternante* o *antisimétrico* si y sólo si

   $$T(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_s) = -T(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_s)$$

   para cualesquiera $i, j \in \{1,\dots,s\}$. En forma equivalente,

   $$T^\sigma = \operatorname{signo}(\sigma)\, T \quad \text{para toda } \sigma \in \Sigma_s.$$

3. Cualquier tensor en $\mathscr{T}^0(V^*) = \mathbb{K}$ o en $\mathscr{T}^1(V^*) = V^*$ es simétrico y alternante a la vez.

Ejercicio 5.2. Verifique las equivalencias afirmadas en la definición anterior. Además, enuncie y demuestre una caracterización de los tensores simétricos (respectivamente, alternantes) en términos de los componentes del tensor.

Ejemplo 5.3. El producto escalar usual en $\mathbb{K}^n$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es un tensor simétrico.

Ejemplo 5.4. Si $\dim V = n$, entonces el tensor "determinante" en $\mathscr{T}^n(V^*)$ que asocia a $(v_1,\dots,v_n)$ el determinante de la matriz cuya j-ésima columna está formada por las coordenadas de v_j (con respecto de alguna base fija) es un tensor alternante.

Ejercicio 5.5. Demuestre que el conjunto de s-tensores simétricos $\mathscr{S}^s(V^*)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{T}^s(V^*)$. De manera análoga, demuestre que el conjunto de s-tensores alternantes $\wedge^s(V^*)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{T}^s(V^*)$.

Observación 5.6. La notación para los espacios mencionados en el ejercicio anterior varía un poco dependiendo del contexto en que se esté trabajando. En el caso de los tensores alternantes, se usan notaciones como $\bigwedge^s(V)$ (`\bigwedge`), $\Lambda^s(V)$ o $\Lambda^s(V^*)$. En los últimos dos casos, se usa una letra lambda mayúscula por comodidad, aunque en realidad el símbolo correcto debe ser una cuña.

La siguiente proposición muestra una relación entre $\mathscr{S}^s(V^*)$ y $\wedge^s(V^*)$ para el caso $s = 2$.

Proposición 5.7. $\mathscr{T}^2(V^*) = \mathscr{S}^2(V^*) \oplus \wedge^2(V^*)$.

Demostración. Ya hemos visto que la intersección entre $\mathscr{S}^2(V^*)$ y $\wedge^2(V^*)$ es el cero, de modo que sólo hay que probar que cualquier $T \in \mathscr{T}^2(V^*)$ se escribe como la suma de un tensor simétrico y uno alternante. Pero es claro que para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$,

$$T(v_1, v_2) = \left(\frac{T(v_1, v_2) + T(v_2, v_1)}{2}\right) + \left(\frac{T(v_1, v_2) - T(v_2, v_1)}{2}\right)$$

donde el primer término del lado derecho define un tensor simétrico, mientras que el segundo término define un tensor alternante. □

El siguiente ejercicio muestra que la proposición anterior no se puede extender a dimensiones mayores que 2.

Ejercicio 5.8. Sea $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Muestre que $\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3$ no se puede expresar como la suma de un tensor simétrico más otro alternante.

La demostración de la proposición anterior muestra un procedimiento general para obtener tensores simétricos y alternantes. He aquí el caso general.

Proposición 5.9. *Las transformaciones* $\mathrm{Sim}_s, \mathrm{Alt}_s : \mathscr{T}^s(V^*) \to \mathscr{T}^s(V^*)$ *dadas por*

$$\mathrm{Sim}(T) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} T^\sigma \quad \text{y} \quad \mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \mathrm{signo}(\sigma) T^\sigma$$

son proyecciones sobre $\mathscr{S}^s(V^*)$ *y* $\wedge^s(V^*)$*, respectivamente.*

Demostración. Haremos la demostración del caso alternante y dejaremos el caso simétrico como ejercicio. Primero mostraremos que $\mathrm{Alt}(T)$ es alternante. Si $\pi \in \Sigma_s$, entonces

$$(\mathrm{Alt}(T))^\pi = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \mathrm{signo}(\sigma) (T^\sigma)^\pi = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \mathrm{signo}(\sigma) T^{\pi \circ \sigma}.$$

Multiplicamos por $(\mathrm{signo}(\pi))^2 = 1$ y notamos que $\mathrm{signo}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{signo}(\pi)\mathrm{signo}(\sigma)$ para obtener

$$\begin{aligned} (\mathrm{Alt}(T))^\pi &= \mathrm{signo}(\pi) \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \mathrm{signo}(\pi \circ \sigma) T^{\pi \circ \sigma} \\ &= \mathrm{signo}(\pi) \frac{1}{s!} \sum_{\widetilde{\sigma} \in \Sigma_s} \mathrm{signo}(\widetilde{\sigma}) T^{\widetilde{\sigma}} = \mathrm{signo}(\pi) \mathrm{Alt}(T). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma\in\Sigma_s} \mathrm{signo}(\sigma) T^\sigma = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma\in\Sigma_s} T = T.$$

lo que muestra que si T ya es alternante, entonces $\mathrm{Alt}(T) = T$: □

Dados dos tensores simétricos (resp. alternantes) T_1, T_2, en general su producto tensorial $T_1 \otimes T_2$ no es simétrico (resp. alternante). Sin embargo, podemos usar los operadores Sim y Alt para definir nuevos productos que lleve parejas de tensores de un tipo en tensores del mismo tipo.

Definición 5.10. Sean T_1, T_2 tensores covariantes.

1. Si T_1, T_2 son simétricos, su *producto simétrico* es

$$T_1 T_2 = \mathrm{Sim}(T_1 \otimes T_2).$$

2. Si T_1, T_2 son alternantes, su *producto cuña* o *producto exterior* es

$$T_1 \wedge T_2 = \mathrm{Alt}(T_1 \otimes T_2).$$

Ejercicio 5.11. Calcule en forma explícita el producto simétrico $\theta_1\theta_2$ y el producto cuña $\theta_1 \wedge \theta_2$ de $\theta_1, \theta_2 \in V^*$.

Ejercicio 5.12. Muestre que para cualesquiera T_1, T_2, T_3 tensores simétricos y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, se tiene que

1. $T_1 T_2 = T_2 T_1$;
2. $T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$;
3. $(a_1 T_1 + a_2 T_2) T_3 = a_1 T_1 T_3 + a_2 T_2 T_3$.

Ahora estudiaremos algunas propiedades del producto cuña. Para demostrar que este producto es asociativo, usaremos el siguiente lema.

Lema 5.13. *Si* $\mathrm{Alt}(T_1) = 0$, *entonces* $T_1 \wedge T_2 = 0 = T_2 \wedge T_1$.

Demostración. Para fijar ideas, supongamos que T_1 tiene orden s_1 y T_2 tiene orden s_2. Entonces

$$T_1 \wedge T_2 = \mathrm{Alt}(T_1 \otimes T_2) = \frac{1}{(s_1 + s_2)!} \sum_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{signo}(\sigma)(T_1 \otimes T_2)^\sigma,$$

donde Σ es el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, s_1 + s_2\}$. La idea es fijarnos en un subgrupo G de Σ, separar la suma anterior en una suma sobre una unión ajena de clases derechas G_σ y mostrar que cada sumando se anula.

El subgrupo G será el de aquellas permutaciones de $\{1,\ldots,s_1+s_2\}$ que fijan a los elementos $s_1+1,\ldots,s_1+s_2$. Es claro que G es isomorfo a Σ_{s_1} y que para $\pi\in G$, $(T_1\otimes T_2)^\pi = T_1^\pi\otimes T_2$ (aquí usamos dicho isomorfismo); esto implica

$$\sum_{\pi\in G}\operatorname{signo}(\pi)(T_1\otimes T_2)^\pi = \left(\sum_{\pi\in G}\operatorname{signo}(\pi)T_1^\pi\right)\otimes T_2) = \operatorname{Alt}(T_1)\otimes T_2 = 0.$$

Dado $\sigma\in\Sigma$, consideremos la clase derecha $G_\sigma=\{\pi\circ\sigma,\pi\in G\}$; tenemos

$$\sum_{\pi\in G}\operatorname{signo}(\pi\circ\sigma)(T_1\otimes T_2)^{\pi\circ\sigma} = \operatorname{signo}(\sigma)\left(\sum_{\pi\in G}\operatorname{signo}(\pi)(T_1\otimes T_2)^\pi\right)^\sigma = 0.$$

Por último, Σ es la unión ajena de clases derechas G_σ, de modo que al sumar sobre todas las clases derechas obtenemos que $T_1\wedge T_2=0$. La demostración de que $T_2\wedge T_1=0$ es análoga. □

Proposición 5.14. *El producto cuña es asociativo; es decir.*

$$(T_1\wedge T_2)\wedge T_3 = T_1\wedge(T_2\wedge T_3).$$

Demostración. Mostraremos que $(T_1\wedge T_2)\wedge T_3=\operatorname{Alt}(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$. Por definición,

$$(T_1\wedge T_2)\wedge T_3 = \operatorname{Alt}((T_1\wedge T_2)\otimes T_3),$$

y por linealidad,

$$(T_1\wedge T_2)\wedge T_3 - \operatorname{Alt}(T_1\otimes T_2\otimes T_3) = \operatorname{Alt}\left((T_1\wedge T_2 - T_1\otimes T_2)\otimes T_3\right).$$

Para poder aplicar el lema anterior, observemos que

$$\operatorname{Alt}\left(T_1\wedge T_2 - T_1\otimes T_2\right) = (T_1\wedge T_2) - \operatorname{Alt}(T_1\otimes T_2) = 0,$$

de modo que

$$\operatorname{Alt}\left((T_1\wedge T_2 - T_1\otimes T_2)\otimes T_3\right) = 0.$$

La demostración de que $T_1\wedge(T_2\wedge T_3)=\operatorname{Alt}(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$ es similar. □

Ejercicio 5.15. Muestre que el producto cuña es distributivo; es decir, que para cualesquiera T_1,T_2,T_3 tensores alternantes y $a_1,a_2\in\mathbb{K}$, se tiene que

$$(a_1T_1+a_2T_2)\wedge T_3 = a_1T_1\wedge T_3 + a_2T_2\wedge T_3.$$

Nuestra intención ahora es la de determinar una base para el espacio de tensores alternantes $\wedge^s(V^*)$. Si T está en este espacio, al menos sabemos que podemos escribirlo como

$$T=\sum T_{j_1\cdots j_s}\,\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s},$$

de modo que si aplicamos el operador Alt a esta expresión, tenemos

$$T=\sum T_{j_1\cdots j_s}\,\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_s},$$

lo que nos dice que el conjunto $\{\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_s}\}$ es generador de $\wedge^s(V^*)$. Pero es fácil convencerse que este conjunto no es linealmente independiente:

Ejercicio 5.16. Demuestre que si $\theta_1, \theta_2 \in V^*$, entonces

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = -\theta_2 \wedge \theta_1;$$

en particular, esto implica que $\theta_1 \wedge \theta_1 = 0$ para todo $\theta_1 \in V^*$.

Teorema 5.17. *El conjunto de tensores alternantes*

$$\{\, \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_s} \mid 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{s-1} < j_s \le n \,\},$$

es una base de $\wedge^s(V^*)$.

Demostración. Dejaremos al lector como ejercicio mostrar que este conjunto genera a $\wedge^s(V^*)$, de modo que resta mostrar que los elementos son linealmente independientes. Observemos primero que si $\sigma \in \Sigma_s$,

$$(\omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s})^\sigma (e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}) = \delta^{j_1}_{\sigma(i_1)} \cdots \delta^{j_s}_{\sigma(i_s)},$$

que es distinto de cero si y sólo si σ es la permutación σ_0 tal que $\sigma_0(i_1) = j_1, \ldots, \sigma_0(i_s) = j_s$. Así,

$$\begin{aligned}
(\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_s})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}) &= \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \operatorname{signo}(\sigma) (\omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s})^\sigma (e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}) \\
&= \frac{1}{s!} \operatorname{signo}(\sigma_0).
\end{aligned}$$

Finalmente, consideremos la combinación lineal

$$\sum a_{j_1 \cdots j_s} \omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_s} = 0,$$

y evaluémosla en $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s})$. Por los cálculos anteriores, tenemos que

$$\frac{1}{s!} \operatorname{signo}(\sigma_0) a_{\sigma_0(i_1) \cdots \sigma_0(i_s)} = \frac{1}{s!} \operatorname{signo}(\sigma_0) a_{j_1 \cdots j_s} = 0$$

para cualesquiera $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{s-1} < j_s \le n$, de modo que los elementos son linealmente independientes. □

Ejercicio 5.18. Complete la demostración del teorema, mostrando que el conjunto dado genera a $\wedge^s(V^*)$.

Corolario 5.19. *Si* $\dim V = n$ *y* $1 \le s \le n$, *entonces*

$$\dim \wedge^s(V^*) = \binom{n}{s}$$

Ejercicio 5.20. Demuestre el corolario anterior.

Ejercicio 5.21. Demuestre que si $s > n$, entonces $\wedge^s(V^*) = \{0\}$.

Definición 5.22. El *álgebra exterior* de V^* es la suma directa

$$\wedge(V^*) = \wedge^0(V^*) \oplus \wedge^1(V^*) \oplus \cdots \wedge^n(V^*),$$

donde $\wedge^0(V^*) = \mathbb{K}$. Con la operación de producto cuña, $\wedge(V^*)$ tiene una estructura de álgebra sobre $\mathbb{K}$.[1]

Ejercicio 5.23. Muestre que el álgebra exterior $\wedge(V^*)$ es un álgebra no conmutativa; más precisamente, muestre que si $T_1 \in \wedge^{s_1}(V^*)$ y $T_2 \in \wedge^{s_2}(V^*)$, entonces

$$T_1 \wedge T_2 = (-1)^{s_1 s_2} T_2 \wedge T_1.$$

El siguiente es un ejercicio *un poco más complejo*:

> ¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathscr{S}^s(V^*)$ de los tensores simétricos de orden s sobre un espacio vectorial V de dimensión n? Calcule esta dimensión al menos en algunos casos particulares.

Divertimento: El tensor de Levi-Civita[2]

En la siguiente sección veremos que los tensores alternantes tienen una muy estrecha relación con los determinantes. Por el momento veremos un caso muy sencillo de esta relación, comenzando con el caso $n = 2$. Recordando el Corolario 5.19, observemos que $\dim \wedge^2(\mathbb{R}^2) = \binom{2}{2} = 1$, de modo que cualquier elemento diferente de cero constituye una base de este espacio. Si $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y ω^1, ω^2 es su base dual, sabemos también que $\omega^1 \wedge \omega^2$ es un elemento diferente de cero; de hecho, por el ejercicio 5.11, tenemos que

$$\omega^1 \wedge \omega^2(e_1, e_2) = \frac{1}{2}\left(\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1\right)(e_1, e_2) = \frac{1}{2}.$$

Aunque se trate de un ejemplo de dimensión baja, la igualdad anterior muestra que la definición del producto cuña contiene unas constantes que pueden ser un tanto molestas a la hora de hacer algunos cálculos. Por otro lado, recordemos que la existencia de fracciones como $1/2$ hacen que la ecuación $\mathrm{Alt}(T) = T$ sea válida y por ello es que optamos por definir Alt de esta manera.

Para no estar cargando todo el tiempo el factor $1/2$, podemos elegir como base al tensor $\varepsilon \in \wedge^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varepsilon(e_1, e_2) = 1$. Usando la notación anterior, $\varepsilon = 2\omega^1 \wedge \omega^2$. Observemos que los componentes de ε en términos de los productos tensoriales $\omega^i \otimes \omega^j$ son

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i = 1, j = 2, \\ -1, & i = 2, j = 1. \end{cases}$$

[1] Recordemos que un *álgebra* sobre $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{K}$ que además tiene un producto bilineal y distributivo entre elementos de A.

[2] Cortesía de Alejandro Mendoza Díaz de León.

En términos de permutaciones, si $i = \sigma(1)$ y $j = \sigma(2)$, entonces

$$\varepsilon_{ij} = \text{signo}(\sigma).$$

Ahora pasemos al caso de dimensión 3. Definimos $\varepsilon \in \wedge^3(\mathbb{R}^3)$ mediante el *símbolo de Levi-Civita* ε_{ijk} dado por

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si dos índices son iguales,} \\ \text{signo}(\sigma), & \text{si } \sigma \text{ es una permutación de } 1,2,3. \end{cases}$$

Ejercicio 5.24. Muestre que

$$\det \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a^{1i} a^{2j} a^{3k}.$$

Ejercicio 5.25. Con base en el ejercicio anterior, muestre que si $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\varepsilon(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = \pm 1$.

Ejercicio 5.26. Sean $v = \sum v^j e_j$ y $w = \sum w^k e_k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Muestre que las coordenadas del producto cruz $v \times w$ satisfacen

$$(v \times w)^i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} v^j w^k.$$

La siguiente proposición se demuestra mediante un (largo) cálculo.

Proposición 5.27.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Ejercicio 5.28. Con base en la proposición anterior, demuestre:

1. $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.
2. $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$.
3. $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

Aunque el lector no lo crea, ya conoce una expresión relacionada con los cálculos anteriores.

Proposición 5.29. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Entonces*

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

Demostración. Para demostrar la igualdad, calcularemos las coordenadas de los vectores. Usando dos veces el ejercicio 5.26,

$$(u \times (v \times w))^i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} u^j (v \times w)^k = \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} u^j v^l w^m,$$

y por el primer inciso del Ejercicio 5.28,

$$\begin{aligned} (u \times (v \times w))^i &= \sum_{jklm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u^j v^l w^m \\ &= \sum_m u^m w^m v^i - \sum_l u^l v^l w^i \\ &= (\langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w)^i, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

6. El determinante

En las secciones anteriores hemos considerado tensores sobre un mismo espacio vectorial V; ahora consideraremos una transformación lineal $A : V \to W$ entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y relacionaremos los tensores definidos sobre estos espacios.

Recordemos que si $A : V \to W$, entonces tenemos la transformación transpuesta (o adjunta) $A^* : W^* \to V^*$ dada por $A^*(\theta)(v) = \theta(Av)$. Esta definición se extiende directamente al caso de cualquier tensor $T \in \mathscr{T}^s(V^*)$:

$$(A^* T)(v_1, \dots, v_s) = T(Av_1, \dots, Av_s).$$

Ejercicio 6.1. Muestre las siguientes propiedades de A^*:

1. (Linealidad) Dados $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^s(V^*)$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, entonces

$$A^*(a_1 T_1 + a_2 T_2) = a_1 A^* T_1 + a_2 A^* T_2.$$

2. Si $T_1 \in \mathscr{T}^{s_1}(V^*)$ y $T_2 \in \mathscr{T}^{s_2}(V^*)$, entonces

$$A^*(T_1 \otimes T_2) = (A^* T_1) \otimes (A^* T_2).$$

3. Si $T_1 \in \wedge^{s_1}(V^*)$ y $T_2 \in \wedge^{s_2}(V^*)$, entonces

$$A^*(T_1 \wedge T_2) = (A^* T_1) \wedge (A^* T_2);$$

   así, la transformación $A^* : \wedge(W^*) \to \wedge(V^*)$ es un *homomorfismo de álgebras.*

4. Si $B : W \to U$ es una transformación lineal, entonces

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*.$$

Consideremos un caso particular importante del último inciso del ejercicio anterior. Supongamos que $A : V \to V$ es lineal y sea $A^* : \wedge^n(V^*) \to \wedge^n(V^*)$, donde como de costumbre $\dim V = n$. Por el Corolario 5.19, la dimensión de $\wedge^n(V^*)$ es 1, de modo que $A^* T = cT$ para alguna constante $c \in \mathbb{K}$ y todo $T \in \wedge^n(V^*)$.

Proposición 6.2. *Si $A : V \to V$ es lineal y $T \in \wedge^n(V^*)$, entonces*

$$A^* T = (\det A) T,$$

donde $\det A$ *es el determinante de la transformación* $A : V \to V$.

Demostración. Sea $B : V \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo cualquiera entre V y $\mathbb{R}^n$ y det el n-tensor “determinante” en $\mathbb{R}^n$, es decir, para cualquiera $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $\det(v_1, \ldots, v_n)$ es el determinante de la matriz dada por las coordenadas de estos vectores, respecto de *cualquier* base de $\mathbb{R}^n$. Entonces $B^*(\det) \in \wedge^n(V^*)$ y $A^* B^*(\det) = cB^*(\det)$; como B es un isomorfismo, tenemos que $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$ (ejercicio) y

$$(BAB^{-1})^*(\det) = (B^{-1})^* A^* B^*(\det) = c(B^{-1})^* B^*(\det) = c(\det);$$

si evaluamos ambos extremos de esta expresión en la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$c = (BAB^{-1})^*(\det)(e_1, \ldots, e_n) = \det((BAB^{-1})e_1, \ldots, (BAB^{-1})e_n) = \det(BAB^{-1}) = \det(A),$$

lo que demuestra la proposición. □

Referencias

[1] Bishop, Goldberg, Tensor Analysis on Manifolds, Dover, 1980.

[2] Guillemin, Pollack, Topología Diferencial, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

[3] Lee, Riemannian manifolds, An Introduction to Curvature, Springer, 1997.

[4] O’Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, 1983.

[5] Spivak, A comprehensive introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, 1999.