

Notas para un curso de Variable Compleja I

Oscar Palmas - Alberto Lazcano
Facultad de Ciencias, UNAM

Esta versión: 13 de agosto de 2020

II

En estas notas coleccionaremos algunas de las ideas que vimos/veremos en la clase. En ese sentido, no son unas notas completas en el sentido de que aquí aparecerán todos los detalles; aunque si alguien así lo solicita, los incluiremos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Hechos básicos	1
1.2. Forma polar. Potencias y raíces	5
1.3. Lugares geométricos en \mathbb{C}	8
1.4. La proyección estereográfica	9
1.5. <i>Checklist</i> I: Topología, sucesiones y series	14
1.6. Ejercicios	17
2. Funciones de variable compleja	21
2.1. <i>Checklist</i> II: Funciones de variable compleja	21
2.2. Ejemplos de funciones	24
2.3. Transformaciones de Möbius	34
2.4. Funciones analíticas	39
2.5. Transformaciones conformes	44
2.6. Teorema de la función inversa	45
2.7. Funciones armónicas	46
2.8. Ejercicios	48
3. Cálculo integral	53
3.1. Conceptos básicos	53
3.2. Lema de Goursat	59
3.3. El Teorema de Cauchy y sus consecuencias	63
3.4. Las funciones analíticas vistas más de cerca	66
3.5. Principio del módulo máximo	71
3.6. El Teorema de Cauchy, de nuevo	73
3.7. Funciones armónicas, de nuevo	78
3.8. Ejercicios	82
4. Series	87
4.1. Sucesiones de funciones	87
4.2. Series de potencias	90
4.3. Funciones analíticas y series de Taylor	91
4.4. Series de Laurent	95
4.5. Clasificación de singularidades	99

4.6. Teorema del residuo. Cálculo de residuos	107
4.7. Cálculo de integrales	111
4.8. Ejercicios	116
Bibliografía	119

Capítulo 1

Introducción

1.1. Hechos básicos

Trabajaremos con los números complejos, que podemos representar de varias formas. La más común es la siguiente:

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

En este conjunto definimos las operaciones de suma y producto como

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

y con estas operaciones, se puede probar que \mathbb{C} es un *campo*.

Dado un número complejo escrito como $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definimos su *parte real* $\operatorname{Re} z$ y su *parte imaginaria* $\operatorname{Im} z$ como $\operatorname{Re} z = x$ y $\operatorname{Im} z = y$. Así, tanto la parte real como la parte imaginaria son números reales. Si $\operatorname{Im} z = 0$, entonces escribimos $x + i0$ simplemente como x y si $\operatorname{Re} z = 0$, escribimos $z = iy$ y decimos que z es un número *imaginario puro*.

Podemos representar geoméricamente a \mathbb{C} haciendo que cada número $z = x + iy$ corresponda con el punto de coordenadas (x, y) en un plano cartesiano. Al hacer esto, conviene denominar al eje horizontal (o de las abscisas) como el *eje real* y al eje vertical (o de las ordenadas) como el *eje imaginario*.

Dado $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definimos el *conjugado* de z como el número complejo $\bar{z} = x - iy$. Geométricamente, el conjugado \bar{z} de z se obtiene al reflejar z con respecto del eje real.

Observemos que

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}). \quad (1.1)$$

Por otro lado, de acuerdo con la definición del producto de números complejos,

$$z \cdot \bar{z} = (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2;$$

la raíz cuadrada de la última expresión es la *norma* o el *módulo* de z , denotado por $|z|$; es decir,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}};$$

en forma equivalente, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, o bien

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1,$$

lo que nos dice que el inverso de un número complejo diferente de cero se puede escribir como

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Un caso particular sencillo pero bastante útil:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = -i.$$

Podemos obtener una serie de propiedades sencillas de los números complejos.

Proposición 1.1. *Para cualesquiera $z, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ se tiene:*

- $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.
- $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ y $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$; en general,

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(z_i) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(z_i).$$

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$; en general se tiene

$$|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$$

- $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.
- (*Identidad del paralelogramo.*) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
- (*Desigualdad del triángulo.*) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. (*¿Cuándo vale la igualdad?*); en general,

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

La demostración de cada una de las afirmaciones en la proposición anterior es sencilla. Una propiedad cuya demostración conviene detallar es la siguiente:

Teorema 1.2 (Desigualdad de Cauchy en el caso complejo). *Sean $z_i, w_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right). \quad (1.2)$$

y la igualdad vale si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $z_i = \lambda w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Antes de dar la demostración, es conveniente dar dos observaciones.¹

Observación 1.3. Debemos enfatizar que en el caso de la igualdad, el número λ es el mismo para todas las parejas z_i, \bar{w}_i .

Observación 1.4. La desigualdad de Cauchy es en realidad una igualdad cuando $n = 1$. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$:

$$\begin{aligned} |z\bar{w}|^2 &= |(a + ib)(c - id)|^2 = |(ac + bd) + i(bc - ad)|^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= |z|^2 |w|^2. \end{aligned}$$

¿Qué nos dice esto? Que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $z = \lambda w$, en otras palabras, que z y w son linealmente dependientes *sobre los complejos*. Es decir, aquí estamos viendo a \mathbb{C} como un espacio vectorial sobre sí mismo, pero en este caso, como espacio vectorial, \mathbb{C} tiene dimensión uno, de modo que *cualesquiera* dos complejos son linealmente dependientes.

Demostración. Observemos primero que si el lado izquierdo de la desigualdad se anula, no hay nada que demostrar, así que supondremos que es diferente de cero. Comenzaremos con el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n |z_i - \lambda w_i|^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \lambda w_i) \overline{(z_i - \lambda w_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n (|z_i|^2 - \lambda \bar{z}_i w_i - \bar{\lambda} z_i \bar{w}_i + |\lambda|^2 |w_i|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (|z_i|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} z_i \bar{w}_i) + |\lambda|^2 |w_i|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right) + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2. \end{aligned}$$

¹En ambas observaciones, agradecemos los comentarios de Elsa Varela.

El hecho de que lo anterior valga para λ arbitrario nos permite transformar el término entre paréntesis en *algo real*, de la manera siguiente: Puesto que $\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \neq 0$, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{\mu} \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i = \left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right|$; por supuesto,

$$\bar{\mu} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right|}{\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i};$$

observen que $|\mu| = 1$. Ahora, sustituyendo arriba $\lambda = t\mu$, con $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2t \left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| + t^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2, \quad (1.3)$$

de modo que el polinomio de segundo grado $c + bt + at^2$ definido por el lado derecho de esta última desigualdad sólo puede tener a lo más una raíz, y por tanto su discriminante $b^2 - 4ac \leq 0$, lo que nos da la desigualdad (1.2).

En el caso de igualdad en (1.2), el lado derecho de (1.3) es en realidad un cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2t \left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| + t^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2t \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2 + t^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2} \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} - t \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Si $\sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 0$, entonces $w_i = 0$ para toda i y cada pareja z_i, w_i es linealmente dependiente. Si $\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \neq 0$, elegimos

$$t_0 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}};$$

regresando al primer desarrollo en la demostración, tenemos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |z_i - t_0 \mu w_i|^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} - t_0 \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2} \right)^2 = 0,$$

de modo que $|z_i - t_0 \mu w_i| = 0$ para cada i ; por tanto $z_i = t_0 \mu w_i$ y cada pareja z_i, w_i es linealmente dependiente. \square

Observación 1.5. La expresión que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad de Cauchy, a saber,

$$\sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}.$$

define una transformación de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ en \mathbb{C} que satisface propiedades similares a las del producto escalar en \mathbb{R}^n y se llama el *producto hermitiano* canónico en \mathbb{C}^n .

1.2. Forma polar. Potencias y raíces

Otra manera útil de representar a los números complejos es la *forma polar*, que utiliza justamente las coordenadas polares en vez de las coordenadas cartesianas.

Si $z = x + iy$ (cambio la notación para adecuarla a la ya conocida), podemos escribir

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

donde r no es otra cosa que el módulo de z , y θ es el *argumento* de z , definido salvo múltiplos enteros de 2π . Como sabemos, también podemos obtener r, θ en términos de x, y como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x},$$

si $x \neq 0$ (ver figura 1.1). Usando estas expresiones, escribimos z como

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

que es llamada la *forma polar*.

Observación 1.6. El ángulo θ está determinado salvo múltiplos enteros de 2π . Por ejemplo, consideremos el número complejo $z = 1 - i$. El lector puede calcular directamente que $|z| = \sqrt{2}$ y que un valor para θ es $-\pi/4$, de modo que los valores que puede tomar el argumento de z son $-\pi/4 + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. En resumen, la forma polar de $1 - i$ es

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right).$$

Podemos usar la forma polar para dar una interpretación geométrica del producto de dos números complejos. Observamos que si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ son dos números complejos, escribimos su producto

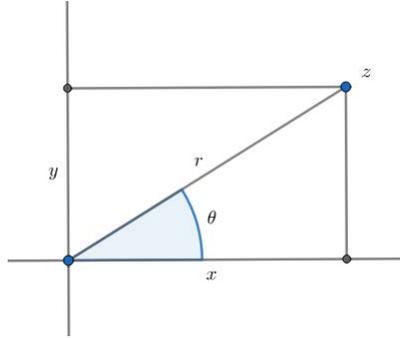


Figura 1.1: Diagrama de Argand.

como²

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)) \cdot (r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))); \end{aligned}$$

lo anterior se expresa por lo general diciendo que *el módulo del producto es el producto de los módulos* y que *el argumento del producto es la suma de los argumentos*, pero ¡cuidado! recordemos que el argumento está definido salvo múltiplos de 2π . (Volveremos una y otra vez a este rollo del argumento.) El lector podrá describir fácilmente una interpretación análoga para el cociente de dos números complejos z_1/z_2 , con $z_2 \neq 0$.

También podemos usar la forma polar para localizar algunos números complejos en el plano; por ejemplo:

- El cuadrado $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$ de z tiene como módulo el cuadrado de $|z|$ y como argumento el doble del argumento de z ; análogamente se puede estudiar z^3, \dots, z^n , con n natural.
- Puesto que $z^{-1} = 1/z = \bar{z}/|z|^2$, el inverso de z está en la dirección de \bar{z} , y se podrá localizar más o menos precisamente, dependiendo del módulo de z : Si este módulo es mayor que 1, entonces el módulo de $1/z$ será menor que 1 y si $|z| = 1$, entonces $|1/z| = 1$. En forma polar, si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r^2} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)).$$

²El lector observador notará que hasta ahora hemos usado un punto \cdot para indicar el producto; poco a poco iremos usándolo menos, salvo cuando necesitamos un poco más de claridad.

En general, conviene observar que la llamada *fórmula de De Moivre*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad (1.4)$$

es válida para todo n entero. Es claro que esta fórmula vale para $n = 0$. Para el caso en que n sea un natural, la demostración de esta fórmula se puede realizar por inducción sobre n . Para el caso en que n sea un entero negativo, basta observar qué pasa si $n = -1$. Pero por nuestro análisis anterior vemos que la fórmula (1.4) vale también para este valor de n .

Para finalizar esta sección, veamos que podemos usar (1.4) para encontrar las raíces n -ésimas de un número complejo.

Si $w = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$ con $r_0 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, queremos resolver la ecuación

$$z^n = w, \quad \text{donde } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Tentativamente, una raíz n -ésima sería

$$z_0 = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{n} \right),$$

donde $\sqrt[n]{r}$ denota la n -ésima raíz *positiva* del número real positivo r_0 . En general, por (1.4) debemos tener

$$r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = z^n = w = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0),$$

lo que ya implica que $r = \sqrt[n]{r_0}$. Además, se debe cumplir la igualdad $n\theta = \theta_0$ módulo 2π ; es decir, debe existir un número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n\theta = \theta_0 + 2\pi k$, de modo que la forma general de una raíz n -ésima de w es

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n} \right),$$

¿Esto querría decir que obtenemos una infinidad de raíces n -ésimas, una para cada k ? En realidad, no; sólo obtendremos un número finito: Observemos que

$$\frac{\theta_0 + 2\pi(k+n)}{n} = \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n} + 2\pi,$$

y como las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π , tenemos que $z_{k+n} = z_k$ para todo n , lo cual muestra que z_0, \dots, z_{n-1} son las *únicas* raíces n -ésimas posibles de w .

¿Son z_0, \dots, z_{n-1} todas distintas? Supongamos que $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ son tales que $z_j = z_k$; entonces

$$\frac{\theta_0 + 2\pi j}{n} = \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}, \quad \text{módulo } 2\pi;$$

esto implica que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $j - k = mn$. Como $|j - k| < n$ y $n \in \mathbb{N}$, la única forma de que esto ocurra es que $j = k$.

1.3. Lugares geométricos en \mathbb{C}

Cualquier lugar geométrico en \mathbb{C} se puede considerar como un conjunto en \mathbb{R}^2 por medio de la identificación natural entre ambos conjuntos. Dos ejemplos sencillos de esto son las rectas y las circunferencias.

Consideremos la ecuación general de una recta en \mathbb{R}^2 :

$$Ax + By + C = 0.$$

Usando las relaciones (1.1), podemos simplemente sustituir y obtener

$$A \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + B \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + C = 0;$$

tomando en cuenta que $1/i = -i$ y haciendo algunas cuentas, podemos escribir lo anterior como

$$(A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + 2C = 0.$$

Notemos que los coeficientes de z y \bar{z} son conjugados entre sí, de modo que podemos escribir la ecuación como

$$\bar{D}z + D\bar{z} + C = 0, \quad D = \frac{1}{2}(A + iB).$$

Por supuesto, otras formas de las ecuaciones de una recta se traducen fácilmente al caso complejo, como el caso de la *forma paramétrica* $P = tz_1 + (1-t)z_2$, donde z_1, z_2 son puntos (distintos) sobre la recta y $t \in \mathbb{R}$.

La ecuación de la circunferencia también se puede escribir fácilmente en forma compleja, utilizando el módulo. Si C es una circunferencia con centro en z_0 y radio r , entonces la ecuación de la circunferencia es $|z - z_0| = r$; pero elevando al cuadrado tenemos

$$r^2 = (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = |z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2.$$

Como en el caso de la ecuación de una línea recta, notemos que los coeficientes de z y \bar{z} son conjugados entre sí. Es natural considerar entonces una ecuación de segundo grado del tipo

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

y aplicarle el procedimiento ya descrito para obtener una ecuación del tipo

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad E = \frac{1}{2}(B + iC). \quad (1.5)$$

Como podemos ver, la ecuación anterior representa una recta si $A = 0$ y una circunferencia si $A \neq 0$.

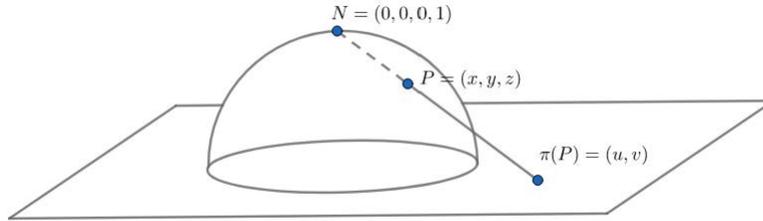


Figura 1.2: La proyección estereográfica.

1.4. La proyección estereográfica

Podemos visualizar a los números complejos por medio de la *proyección estereográfica*, que es una transformación de una esfera en el plano. Para nuestros fines, convendrá considerar a la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , es decir, la esfera de radio 1 con centro en el origen de \mathbb{R}^3 , y al plano complejo como el plano xy de \mathbb{R}^3 . Para no confundirnos, usaremos las coordenadas $(u, v, 0)$ en este plano, aunque en un momento dado, podemos identificar este punto con (u, v) o el número complejo $u + iv$.

La construcción geométrica de la proyección $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es sencilla: Para cada punto $P \in \mathbb{S}^2$ (distinto del *polo norte* N) nos fijamos en la recta que pasa por P y N , prolongándola hasta que corte al plano complejo. Entonces $\pi(P)$ es justamente la intersección de la recta con el plano. Ver figura 1.2.

Puesto que los puntos de la recta que pasa por $P = (x, y, z)$ y $N = (0, 0, 1)$ tienen la forma $tP + (1-t)N$ con $t \in \mathbb{R}$, basta encontrar el valor de t para el que el punto correspondiente tenga su tercera coordenada igual a cero. Obtenemos así la regla de correspondencia para la proyección estereográfica:

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Esto define la proyección para todos los puntos de la esfera, excepto por el polo norte $(0, 0, 1)$. Esto no es mayor problema pues podemos considerar el siguiente conjunto:

Definición 1.7. El conjunto de los números complejos extendidos $\hat{\mathbb{C}}$ es

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Así, podemos extender la definición de la proyección haciendo $\pi(0, 0, 1) = \infty$.

Utilizando un procedimiento análogo al anterior podemos encontrar la fórmula para la transformación inversa de la proyección estereográfica. Dado el punto $(u, v, 0)$ en el plano, nos fijamos en los puntos $t(u, v, 0) + (1-t)(0, 0, 1)$ de la recta

que pasa por este punto y por el polo norte, fijándonos en los valores de t tales que el punto de la recta tiene norma uno. Esto nos da la ecuación cuadrática

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1,$$

la que tiene como raíces $t = 0$ (en cuyo caso obtenemos el polo norte) y

$$t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Sustituyendo este valor, tenemos que la inversa de la proyección es

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) = (x, y, z), \quad (1.6)$$

Podemos utilizar estas expresiones para obtener algunas propiedades de π . Aunque daremos en estas notas la demostración analítica, debemos observar que algunas de estas propiedades también se pueden demostrar de manera geométrica. Una excelente referencia para esto es [6].

Proposición 1.8. *La proyección estereográfica manda circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas en el plano.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una circunferencia en \mathbb{S}^2 . Observemos que dicha circunferencia se puede ver como la intersección de la esfera con un plano, de modo que las ecuaciones de \mathcal{C} son

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Sustituyendo las expresiones en (1.6), vemos que las coordenadas u, v de los puntos de la imagen satisfacen

$$A \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \right) + B \left(\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \right) + C \left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) + D = 0,$$

lo que podemos escribir como

$$0 = 2Au + 2Bv + C(u^2 + v^2 - 1) + D(u^2 + v^2 + 1)$$

o bien

$$(C + D)(u^2 + v^2) + 2Au + 2Bv + (D - C) = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia si $C + D \neq 0$ o de una recta si $C + D = 0$. De hecho, podemos hacer un análisis más preciso y ver que si la circunferencia \mathcal{C} sobre la esfera pasa por el polo norte $(0, 0, 1)$, entonces $C + D = 0$ (pues sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano), y entonces la imagen de \mathcal{C} es una recta. Por otro lado, si la circunferencia no pasa por el polo norte, entonces $C + D \neq 0$ (sus coordenadas no satisfacen la ecuación del plano) y por tanto obtenemos como imagen una circunferencia. \square

Proposición 1.9. *La proyección estereográfica es conforme; es decir, preserva ángulos entre curvas.*

Observación 1.10. Recordemos primero que el ángulo entre dos curvas (suficientemente bonitas) se define como el ángulo entre sus rectas tangentes. Pero también recordemos que existe una pequeña indefinición en este concepto de ángulo, pues las rectas tangentes forman en realidad *dos* ángulos θ_1, θ_2 , relacionados por $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Por convención, elegiremos el ángulo θ de modo que esté en el intervalo $(0, \pi/2]$, lo que en particular implica que $\cos \theta \geq 0$.

Para la demostración de esta propiedad de la proyección, haremos lo siguiente: Digamos que partimos de dos curvas bonitas y luego nos fijamos en sus rectas tangentes. Ahora podemos regresar y fijarnos en curvas todavía más bonitas. Observemos que dada una recta tangente a la esfera, siempre hay un círculo máximo (la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera) que tiene esta recta como tangente: Para obtener dicho círculo, basta fijarse en el plano que contiene a esta recta y al centro de la esfera. En resumen, para nuestro análisis basta fijarnos en círculos máximos, considerar el ángulo que forman dos de ellos, y luego fijarnos en el ángulo que forman sus imágenes.

Demostración de la Proposición 1.9. Separaremos nuestro análisis en tres casos:

- Primer caso: Supongamos que los círculos máximos se intersecan en el polo norte N (o en el polo sur S , que es equivalente). Entonces, sabemos que las imágenes de estos círculos bajo la proyección son dos rectas. Es fácil convencerse (por ejemplo, mediante un dibujo) que el ángulo entre las rectas es el mismo que el ángulo entre los círculos. Para la demostración analítica, puesto que los círculos máximos pasan por $(0, 0, 1)$, podemos suponer que las ecuaciones de los planos que los generan son

$$A_1x + B_1y = 0, \quad A_2x + B_2y = 0;$$

además, podemos suponer que los vectores normales (A_i, B_i) , $i = 1, 2$, tienen norma uno. El ángulo θ entre los círculos es igual al ángulo entre sus vectores normales, de modo que $\cos \theta = |A_1A_2 + B_1B_2|$; ver la observación que está antes de iniciar la demostración. Por otro lado, sus imágenes bajo la proyección estereográfica son dos rectas en el plano, que pasan por el origen y que tienen ecuaciones

$$A_1u + B_1v = 0, \quad A_2u + B_2v = 0;$$

y si llamamos θ' al ángulo entre estas rectas, es claro que $\cos \theta' = |A_1A_2 + B_1B_2| = \cos \theta$.

- Segundo caso: Los dos círculos máximos no pasan por el polo norte (por tanto, tampoco pasan por el polo sur). Ya sabemos que los círculos máximos se obtienen al intersecar la esfera con dos planos que pasan por el origen, digamos, con ecuaciones

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z = 0;$$

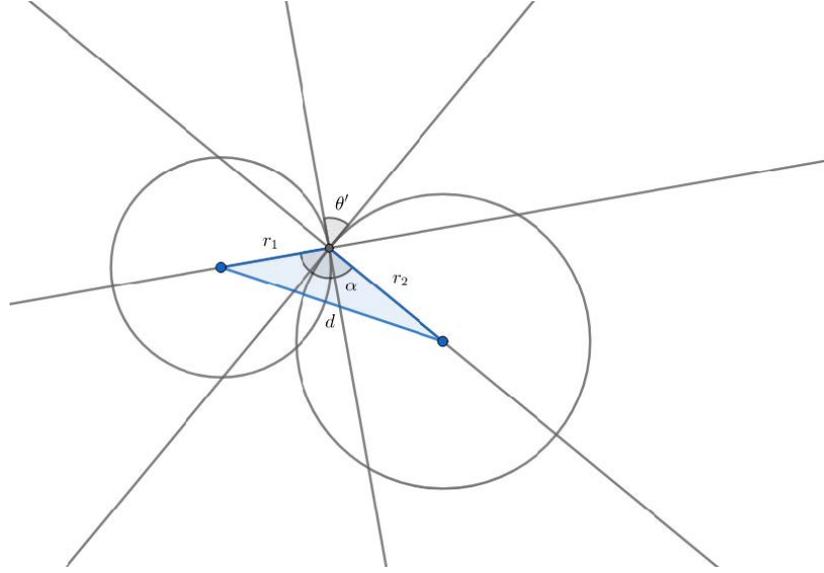


Figura 1.3: Caso 2. Observemos que $\alpha + \theta' = \pi$.

donde de nuevo cada vector (A_i, B_i, C_i) , $i = 1, 2$ es normal al plano correspondiente. Podemos suponer que estos vectores son unitarios, es decir, $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 = 1$. Bajo estas hipótesis, el ángulo θ entre los círculos es igual al ángulo entre los vectores normales y

$$\cos \theta' = |A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|. \quad (1.7)$$

Observemos que, como estamos suponiendo que los círculos no pasan por el polo norte, las coordenadas $(0, 0, 1)$ de N no satisfacen las ecuaciones de los planos, lo que se traduce en que $C_1, C_2 \neq 0$.

Usando de nuevo la forma en que mostramos la Proposición 1.8, obtenemos las ecuaciones de las circunferencias en el plano, como

$$C_i(u^2 + v^2) + 2A_i u + 2B_i v = C_i, \quad i = 1, 2.$$

Como $C_i \neq 0$, podemos dividir esta ecuación entre C_i y completar cuadrados para obtener las ecuaciones

$$\left(u + \frac{A_1}{C_1}\right)^2 + \left(v + \frac{B_1}{C_1}\right)^2 = \frac{1}{C_1^2}, \quad \text{y} \quad \left(u + \frac{A_2}{C_2}\right)^2 + \left(v + \frac{B_2}{C_2}\right)^2 = \frac{1}{C_2^2},$$

donde hemos usado que $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 = 1$, $i = 1, 2$. Así, queremos calcular el ángulo θ' que forman dos circunferencias con radios y centros conocidos. Ver figura 1.3.

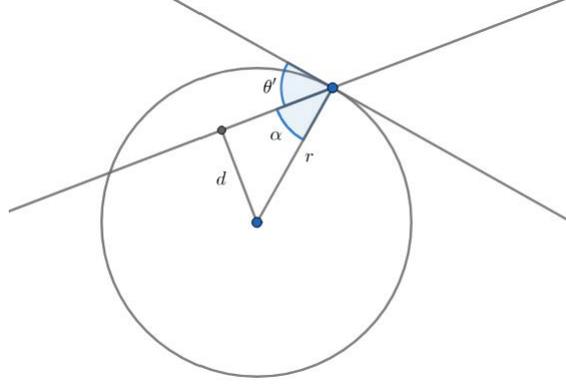


Figura 1.4: Caso 3. En este caso, $\alpha + \theta' = \pi/2$.

Si r_1, r_2 son los radios y d es la distancia entre los centros, sabemos por la ley de los cosenos que

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha;$$

después de algunas cuentas, tendremos que

$$\cos \alpha = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2,$$

lo cual implica que

$$\cos \theta = |A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|,$$

lo que concluye el segundo caso.

- El tercer caso ocurre cuando uno de los círculos máximos pasa por el polo norte N y el otro no. En este caso, las ecuaciones de los círculos son

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y = 0,$$

donde como antes podemos suponer que los vectores normales a los planos son unitarios. Sabemos que las imágenes son la circunferencia

$$\left(u + \frac{A_1}{C_1}\right)^2 + \left(v + \frac{B_1}{C_1}\right)^2 = \frac{1}{C_1^2}$$

y la recta $A_2u + B_2v = 0$, que se muestran en la figura 1.4.

Usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta, tenemos

$$\cos \theta' = \sin \alpha = \frac{\left|A_2 \frac{A_1}{C_1} + B_2 \frac{B_1}{C_1}\right|}{\frac{1}{C_1}} = |A_1A_2 + B_1B_2|;$$

observemos que la expresión del lado derecho es igual a $\cos \theta$ (de nuevo, por nuestra convención sobre el ángulo), de modo que $\theta = \theta'$. \square

1.5. Checklist I: Topología, sucesiones y series

La siguiente es una lista, no exhaustiva, de conceptos y propiedades que supondremos son conocidos por el lector.

Topología de \mathbb{C}

Puesto que hemos identificado al plano complejo \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , es natural definir la distancia entre dos números complejos z, w como $d(z, w) = |z - w|$. Conviene recordar que d debe satisfacer las siguientes propiedades para ser considerada como una *función distancia*:

1. $d(z, w) \geq 0$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ y $d(z, w) = 0$ si y sólo si $z = w$.
2. $d(z, w) = d(w, z)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.
3. $d(z, w) \geq d(z, p) + d(p, w)$ para cualesquiera $z, w, p \in \mathbb{C}$.

Con esta función, \mathbb{C} es un *espacio métrico* y su topología se puede describir de manera sencilla. Comencemos con la siguiente definición.

Definición 1.11 (Disco abierto). Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. El *disco abierto con centro en z_0 y radio r* , denotado $D(z_0, r)$, es el conjunto

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}.$$

Ahora daremos un resumen de algunos conceptos topológicos.

- Un punto z_0 de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es un *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset A$.
- El *interior* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de todos sus puntos interiores.
- Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ es *abierto* si y sólo si coincide con su interior; es decir, todos sus puntos son interiores.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *cerrado* si y sólo si su complemento $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto.
- Un punto z_0 es *punto de acumulación* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $r > 0$, $D(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$.
- La *cerradura* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es igual a la unión de A con el conjunto de puntos de acumulación de A .
- Un punto z_0 es *punto frontera* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si y sólo si para cada $r > 0$, $D(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$ y $D(z_0, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$.
- La *frontera* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de sus puntos frontera.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *disconexo* si existen dos abiertos ajenos $U, V \subset \mathbb{C}$ tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \subset U \cup V$.

- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *conexo* si y sólo si no es disconexo.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *arco-conexo* si para cualesquiera $z, w \in A$ existe una curva continua³ $\alpha: [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\alpha(0) = z$ y $\alpha(1) = w$.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *poligonal conexo* si para cualesquiera $z, w \in A$ existe una poligonal (unión finita de segmentos de recta) contenida en A que los une.

Más adelante usaremos el siguiente resultado, el cual nos dice esencialmente que un conjunto abierto conexo es poligonal conexo, pero que podemos elegir la poligonal de una manera especial.

Proposición 1.12. *Dado un conjunto abierto y conexo U en \mathbb{C} , para cualesquiera dos puntos $z_1, z_2 \in U$ existe una poligonal que los une, tal que todos los segmentos de la poligonal son paralelos a los ejes real e imaginario.*

De hecho, más adelante sólo usaremos conjuntos abiertos que sean conexos, para los cuales reservamos un nombre.

Definición 1.13. Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ es una *región* (o un *dominio*) de \mathbb{C} si y sólo si U es abierto y conexo.

- Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es *compacto* si y sólo si para cualquier cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de K existe una subcubierta finita⁴ de K .

Ejemplo 1.14 (Disco cerrado). Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. El *disco cerrado con centro en z_0 y radio r* , denotado $D(z_0, r)$, es el conjunto

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}.$$

Teorema 1.15 (Heine-Borel). *Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Sucesiones y series de números complejos

- Una *sucesión* de números complejos es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(n) = z_n$, denotaremos a la sucesión simplemente por $\{z_n\}$.
- Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ *converge* a z_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$, entonces $|z_n - z_0| < \varepsilon$.
- Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n, m > N$, entonces $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Teorema 1.16. \mathbb{C} es un espacio métrico completo; es decir, toda sucesión de Cauchy en \mathbb{C} es convergente.

³Más adelante daremos la definición precisa de continuidad.

⁴Puesto que esta parte pretende ser sólo un recordatorio, no definiremos con detalle los conceptos de cubierta y subcubierta.

- Sea $\{z_n\}$ una sucesión en \mathbb{C} . La *serie* generada por $\{z_n\}$ es la suma formal $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Decimos que la serie *converge* si y sólo si existe el límite de la sucesión de sumas parciales

$$s_k = \sum_{n=1}^k z_n.$$

y denotamos a este límite por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Proposición 1.17 (Criterio de Cauchy). *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$, entonces*

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} z_n \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Observemos que esto es equivalente a decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l > N$, $k \neq l$, entonces $|s_k - s_l| < \varepsilon$.

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente* si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

Proposición 1.18. *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces la serie converge.*

- Criterios de convergencia para series reales.

- Serie geométrica: Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$ y diverge si $|r| \geq 1$.
- Criterio de comparación.
 - Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $0 \leq a_n \leq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
 - Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge y $0 \leq c_n \leq d_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge.
- Criterio del cociente.

Supongamos que $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe.

- Si $r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
- Si $r > 1$, la serie diverge.
- Si $r = 1$, el criterio no es concluyente.
- Criterio de la raíz.
Supongamos que $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe.
 - Si $r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
 - Si $r > 1$, la serie diverge.
 - Si $r = 1$, el criterio no es concluyente.

1.6. Ejercicios

1. Determina las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

- $\frac{3 + 5i}{1 + 7i}$;
- $\left(\frac{2 + i}{3 - 2i}\right)^2$;
- $(1 + i)^n + (1 - i)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, encuentra las partes real e imaginaria de z^3 y de $(z - 1)/(z + 1)$.

3. Determina el módulo y el conjugado de

- $(2 + i)(4 + 3i)$;
- $\frac{3 - i}{\sqrt{2} + 3i}$.

4. Al aplicar inducción a la desigualdad del triángulo tenemos, para cualesquiera $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

Demuestra que la igualdad vale si y sólo si $z_j/z_k \geq 0$ para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$ tales que $z_k \neq 0$.

5. Calcula las raíces cuadradas de $\sqrt{3} + 3i$.

6. Muestra que la transformación $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$ es un homomorfismo de grupos entre el grupo $(\mathbb{R}, +)$ y la circunferencia unitaria $\{|z| = 1\}$ (con la operación de producto en \mathbb{C}).

7. Resuelve la ecuación $\bar{z} = z^{n-1}$, donde $n \neq 2$ es un número natural.

8. Muestra que el espacio de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con las operaciones de suma y multiplicación matricial, es isomorfo al campo de los números complejos.

9. Demuestra la identidad

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

10. Sean z_1, z_2, z_3 tres vértices de un paralelogramo, donde z_1 es opuesto a z_3 . Encuentra una expresión para z_4 , el vértice opuesto a z_2 .
11. Los puntos z_1, \dots, z_n están de un mismo lado de una recta que pasa por el origen. Demuestra que los puntos $1/z_1, \dots, 1/z_n$ satisfacen una propiedad análoga. ¿Con respecto de cuál recta? Muestra además que $z_1 + \dots + z_n \neq 0$ y que

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

12. En relación con el ejercicio anterior, muestra que si los puntos z_1, \dots, z_n satisfacen que $z_1 + \dots + z_n = 0$, entonces cualquier recta que pase por el origen separa los puntos, siempre que éstos no se encuentren sobre dicha recta.
13. Demuestra la siguiente desigualdad usando consideraciones geométricas:

$$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

14. Demuestra que

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| < 1$$

si $|a| < 1$ y $|b| < 1$.

15. Determina las familias de curvas en el plano complejo definidas por cada una de las siguientes ecuaciones:

- $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = C$, donde C es una constante.
- $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = C$, donde C es una constante y z_1, z_2 son números complejos fijos.

16. Muestra que los puntos a_1, a_2, a_3 son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1.$$

17. Halla las distancias máxima y mínima entre el origen y los puntos de la curva

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = C, \quad C > 0.$$

18. ¿Bajo qué condiciones tres puntos z_1, z_2, z_3 distintos dos a dos están en una misma recta?

19. Si

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

muestra que

$$1 + \omega^h + \omega^{2h} + \dots + \omega^{(n-1)h} = 0$$

para cualquier entero h que no sea múltiplo de n .

20. Muestra que z y z' van a dar a puntos diametralmente opuestos en la esfera de Riemann bajo la proyección estereográfica si y sólo si $z\bar{z}' = -1$.
21. Encuentra la imagen bajo la proyección estereográfica de los vértices de un cubo cuyos vértices están sobre la esfera y cuyas caras son paralelas a los ejes de coordenadas.
22. Determina el radio de la imagen esférica de la circunferencia en el plano con centro a y radio R .
23. Describe la imagen bajo la proyección estereográfica de los conjuntos (i) $\operatorname{Im} z > 0$; (ii) $\operatorname{Re} z < 0$; (iii) una familia de rectas paralelas.
24. Demuestra la Proposición 1.12: Si $U \subset \mathbb{C}$ es una región, muestra que para cualesquiera dos puntos $z_1, z_2 \in U$ existe una poligonal que los une, tal que todos los segmentos de la poligonal son paralelos a los ejes real e imaginario.

Capítulo 2

Funciones de variable compleja

El objeto principal de este curso es el estudio de las funciones $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; más precisamente, la mayor parte del tiempo consideraremos que el dominio de nuestras funciones será una región U del plano complejo. Con el objeto de familiarizarnos con estas funciones, mencionaremos rápidamente los conceptos básicos de la teoría de funciones, daremos algunos ejemplos y luego pasaremos a su estudio teórico.

2.1. Checklist II: Funciones de variable compleja

Consideremos una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, donde A es un subconjunto de \mathbb{C} . Esta función se puede escribir como $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde para cada z se tiene que $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ y $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Como en el caso de los números complejos individuales, decimos que u es la parte real de f y que v es la parte imaginaria.

Definición 2.1. Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de acumulación de A . Entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in A$, entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Como en el caso de funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos analizar el límite coordenada a coordenada.

Proposición 2.2. Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función, con $f = u + iv$, y z_0 un punto de acumulación de A . $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} v(z)$ existen y son iguales a $\operatorname{Re}(L)$ y $\operatorname{Im}(L)$, respectivamente.

Ahora coleccionamos en la siguiente proposición varias propiedades del límite. La demostración se deja como ejercicio, pues es completamente similar a la demostración del hecho correspondiente para funciones de variable real.

Proposición 2.3. Sean $f, g: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones y z_0 un punto de acumulación de A .

- *Suma:* Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen y son iguales a L_f y L_g , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (f + g)(z)$ existe y es igual a $L_f + L_g$.
- *Producto:* Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen y son iguales a L_f y L_g , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z)$ existe y es igual a $L_f \cdot L_g$.
- *Cociente:* Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen y son iguales a L_f y L_g , con $L_g \neq 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (f/g)(z)$ existe y es igual a L_f/L_g .

Ahora revisaremos brevemente el concepto de continuidad de funciones de variable compleja.

Definición 2.4. Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

- Sea $z_0 \in A$. Entonces f es *continua* en z_0 si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$; es decir, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ y $z \in A$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.
- f es *continua* en un conjunto $B \subset A$ si y sólo si f es continua en z_0 para todo $z_0 \in B$.

Las funciones continuas tienen propiedades completamente análogas a las de funciones continuas de variable real. Por ejemplo, tenemos las propiedades usuales de las funciones continuas bajo la suma, producto, división y composición, además de las conocidas propiedades topológicas:

- La imagen inversa de abiertos es abierta.
- La imagen inversa de cerrados es cerrada.
- La imagen directa de compactos es compacta.
- La imagen directa de conexos es conexa.
- Continuidad uniforme. Decimos que una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es *uniformemente continua* si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$ y $z, w \in U$, entonces $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

Sucesiones y series de funciones

- Sucesiones de funciones. Convergencia. Convergencia uniforme.

Definición 2.5. Una sucesión de funciones $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ *converge puntualmente* (o simplemente *converge*) a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ si y sólo si para cada $z \in U$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$. Por otro lado, decimos que la sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente* si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in U$.

Conviene hacer unos comentarios sobre lo que ocurre con el límite de una sucesión que converge puntualmente. Consideremos una sucesión $f_n: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones reales que converge uniformemente a una función f . Geométricamente, si trazamos la gráfica de f y una franja de radio ϵ alrededor de dicha gráfica, entonces para toda n suficientemente grande, la gráfica de f_n cae completamente dentro de la franja.

Veamos, por ejemplo, las funciones reales $f_n(x) = x^n$, con $x \in [0, 1]$. Es claro que la sucesión converge a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{si } x = 1; \end{cases}$$

sin embargo, es fácil convencerse de que la convergencia de f_n a f no puede ser uniforme, pues si $\epsilon < 1$, entonces siempre existen $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (0, 1)$ tales que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \geq \epsilon$; por ejemplo, n y x tales que $x^n = \epsilon$. En este caso podríamos haber definido la sucesión en el intervalo abierto $(0, 1)$ y tampoco en este caso tendríamos convergencia uniforme.

Ejemplo. Analicemos ahora el análogo complejo del ejemplo anterior, es decir, la sucesión de funciones $f_n(z) = z^n$. Si consideramos a \mathbb{C} como el dominio de estas funciones, entonces $\{f_n\}$ no converge, pues en particular si $|z| > 1$, tenemos que $f_n(z) \rightarrow \infty$.

Por otro lado, si nos restringimos al disco unitario $D(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$, entonces $f_n(z) \rightarrow 0$ para cada z en este dominio, de modo que la sucesión converge.

Sin embargo, esta sucesión no converge uniformemente en este disco. De hecho, para cada n tenemos que $f_n(D(0, 1)) = D(0, 1)$, de modo que si $\epsilon < 1$ no podemos lograr que $|f_n(z)| < \epsilon$ para todo $z \in D(0, 1)$.

Para concluir con este ejemplo, podemos ver que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cualquier disco cerrado $\overline{D(0, r)} = \{z : |z| \leq r\}$ para cualquier $r < 1$: Para todo z en un disco de este tipo,

$$|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n \leq r^n;$$

como $r < 1$, existe N tal que si $n > N$, entonces $r^n < \epsilon$. Usando este valor de N , se prueba la afirmación.

Proposición 2.6 (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme). *La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$*

- Convergencia uniforme de funciones continuas.

Teorema 2.7. *Sea $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es continua.*

La demostración usa el hecho de que

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)|;$$

podemos controlar el primer y el tercer términos del lado derecho gracias a la convergencia, mientras que controlamos el segundo término por la continuidad de cada función f_n .

- Podemos extender el concepto de serie al caso de *series de funciones* y, como lo hicimos en el caso de las sucesiones, podemos hablar de la convergencia y de la convergencia uniforme de series de funciones; en el capítulo 4 abundaremos sobre estas cuestiones.
- Para probar la convergencia uniforme, uno de los criterios que más nos servirá es el siguiente.

Teorema 2.8 (Prueba M de Weierstrass). *Sean U una región de \mathbb{C} y $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Supongamos también que existe una sucesión de números reales no negativos $\{M_n\}$ tales que:*

- $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in U$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniforme y absolutamente en U .

Demostración. Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge; por el criterio de Cauchy,

dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=k}^{k+p} M_n < \varepsilon$ para todo $k > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, de modo que para todo $z \in U$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=k}^{k+p} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k}^{k+p} M_n < \varepsilon;$$

así, la serie converge absoluta y uniformemente. □

2.2. Ejemplos de funciones

En esta sección veremos algunas funciones de manera explícita, con el fin de ir teniendo una colección de ejemplos para ilustrar los resultados posteriores.

Funciones lineales

Consideremos la multiplicación por un número complejo z_0 fijo:

$$f_{z_0}(z) = z_0 z.$$

Cuando z_0 es real, o mejor dicho, cuando $\text{Im } z_0 = 0$, sabemos que la función no es más que una homotecia.

Ahora consideremos el caso en que $|z_0| = 1$; es más, supongamos que $z_0 = i$. En este caso, f_i (no confundir i con un índice) corresponde geoméricamente a una rotación de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el caso de un número complejo cualquiera de módulo 1, digamos

$$z_0 = \cos \theta_0 + i \sen \theta_0,$$

la función f_{z_0} es una rotación con ángulo θ_0 . Recordando que una rotación de este tipo (vista como una transformación en \mathbb{R}^2) queda representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sen \theta_0 \\ \sen \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

podemos pensar en asociar

$$z_0 \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sen \theta_0 \\ \sen \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

Ahora bien, para el caso general en que $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sen \theta_0)$, la transformación f_{z_0} resulta ser una rotación con ángulo θ_0 , seguida de una homotecia con razón de homotecia r_0 , lo que viene representado por

$$r \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sen \theta_0 \\ \sen \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta_0 & -r \sen \theta_0 \\ r \sen \theta_0 & r \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

Entonces podemos pensar a los números complejos como las matrices de esta forma particular:

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

forma que nos será útil más adelante.

Potencias enteras positivas

Podemos utilizar la fórmula de De Moivre (1.4) para dar una interpretación geométrica de las funciones de la forma $z \mapsto z^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Empecemos por el caso $n = 2$. Si $z = r(\cos \theta + i \sen \theta)$, entonces

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \sen(2\theta)),$$

lo que nos dice que la función $z \mapsto z^2$ estira el argumento de z al doble, y eleva al cuadrado su módulo. Veamos qué pasa con los puntos del círculo unitario: Esta

transformación deja *invariante* dicho círculo y si recorremos el círculo unitario del dominio una vez en el sentido contrario al de las manecillas, entonces recorreremos dos veces al círculo unitario del contradominio. Algo análogo ocurre con circunferencias de radio r (con centro en el origen): Al recorrerla una vez en el sentido de las manecillas, su imagen *cubre* dos veces a la circunferencia de radio r^2 . El lector podrá dar fácilmente una interpretación geométrica de la función $z \mapsto z^n$.

Para estudiar las funciones $z \mapsto z^n$ para un entero negativo n , bastará entender el comportamiento de la *inversión*¹

$$z \mapsto \frac{1}{z},$$

la cual estudiaremos como parte de una familia importante de funciones.

Polinomios y funciones racionales²

Por definición, una *función polinomial* es aquella que puede escribirse de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ y suponemos que $a_n \neq 0$. Cuando esto ocurre, decimos que P es una función polinomial (o simplemente, un polinomio) de grado n .

Como es conocido, cualquier polinomio de grado mayor o igual a 1 con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en \mathbb{C} , lo que implica a su vez que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces. Además, decimos que una raíz α de P tiene multiplicidad h (≥ 1) si podemos escribir

$$P(z) = (z - \alpha)^h P_h(z), \quad P_h(\alpha) \neq 0.$$

Otra manera de describir la multiplicidad h : es el orden de la primera derivada de P que no se anula; es decir, $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(h-1)}(\alpha) = 0$ y $P^{(h)}(\alpha) \neq 0$. Para mostrar esto, primero daremos un lema.

Lema 2.9. *Si α es una raíz de P de multiplicidad h , entonces para toda $k \leq h$ natural,*

$$P^{(k)}(z) = (z - \alpha)^{h-k} Q_k(z), \quad \text{con } Q_k(\alpha) \neq 0.$$

Demostración. La demostración para $h = 1$ es sencilla, de modo que supondremos que $h > 1$ y probaremos la afirmación por inducción sobre k . Si $k = 1$, como $P(z) = (z - \alpha)^h P_h(z)$ con $P_h(\alpha) \neq 0$, al derivar tenemos

$$\begin{aligned} P'(z) &= (z - \alpha)^h P_h'(z) + h(z - \alpha)^{h-1} P_h(z) \\ &= (z - \alpha)^{h-1} ((z - \alpha) P_h'(z) + h P_h(z)) \\ &= (z - \alpha)^{h-1} Q_1(z), \end{aligned}$$

¹Cabe mencionar que éste no es un término estándar. En otros contextos, podría prestarse a confusión con la inversión geométrica con respecto de una circunferencia.

²Esta exposición está basada en las notas del curso anterior, durante el semestre 2018-I.

donde $Q_1(\alpha) = hP_h(\alpha) \neq 0$. Supongamos válida la hipótesis de inducción para $k-1$; es decir,

$$P^{(k-1)}(z) = (z - \alpha)^{h-(k-1)}Q_{k-1}(z), \quad \text{con } Q_{k-1}(\alpha) \neq 0.$$

Al derivar esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} P^{(k)}(z) &= (z - \alpha)^{h-(k-1)}Q'_{k-1}(z) + (h - (k-1))(z - \alpha)^{h-k}Q_{k-1}(z) \\ &= (z - \alpha)^{h-k}((z - \alpha)Q'_{k-1}(z) + (h - (k-1))Q_{k-1}(z)) \\ &= (z - \alpha)^{h-k}Q_k(z), \end{aligned}$$

con $Q_k(\alpha) = (h - (k-1))Q_{k-1}(\alpha) \neq 0$. □

Corolario 2.10. *Si α es un cero de orden h de $P(z)$, entonces*

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(h-1)}(\alpha) = 0$$

y $P^{(h)}(\alpha) \neq 0$.

Dejaremos la demostración de la afirmación recíproca como ejercicio.

Para ilustrar la naturaleza distinta de las funciones analíticas complejas y las funciones derivables en el sentido del cálculo diferencial, mencionemos un teorema sobre el comportamiento de los polinomios:

Teorema 2.11 (Lucas, 1874). *Sea L una recta en el plano complejo, la cual determina dos semiplanos. Si las raíces de un polinomio $P(z)$ están todas en uno de los semiplanos determinados por L , entonces las raíces de su derivada $P'(z)$ también están todas en ese mismo semiplano.*

Veamos primero un caso particular, cuando L es la recta real y el semiplano es el semiplano inferior, es decir, el conjunto de los puntos tales que su parte imaginaria es negativa.

Demostración del caso particular. Sea $P(z)$ un polinomio con raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, de modo que

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

Estamos suponiendo que $\text{Im}(\alpha_i) < 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. La derivada $P'(z)$ es de la forma

$$P'(z) = a_n \sum_{i=1}^n (z - \alpha_1) \cdots \widehat{(z - \alpha_i)} \cdots (z - \alpha_n),$$

donde el símbolo $\widehat{}$ indica que el término se ha omitido. Tomando el cociente,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z - \alpha_i}}{|z - \alpha_i|^2}.$$

Ahora, supongamos que $\text{Im } z \geq 0$ y veamos que $P'(z) \neq 0$. Al tomar la parte imaginaria de la expresión anterior, tenemos

$$\text{Im} \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \text{Im} \left(\frac{1}{z - \alpha_i} \right) = - \sum_{i=1}^n \text{Im} \left(\frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2} \right),$$

pero como $\text{Im } z \geq 0$ y por otro lado $\text{Im}(\alpha_i) < 0$, tenemos que $\text{Im}(z - \alpha_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Así, $\text{Im}(P'(z)/P(z)) > 0$ y por tanto $P'(z)$ no se puede anular para $\text{Im } z \geq 0$, lo que dice que todas las raíces de $P'(z)$ están en el mismo semiplano que las raíces de $P(z)$. \square

Demostración del teorema de Lucas en el caso general. Supongamos que $L = \{z = z_0 + tu\}$, donde $z_0, u \in \mathbb{C}$ están fijos, $|u| = 1$ y $t \in \mathbb{R}$. Podemos escribir esta ecuación como

$$\frac{z - z_0}{u} = t \in \mathbb{R}, \quad \text{o} \quad \text{Im} \left(\frac{z - z_0}{u} \right) = 0.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las raíces α_i del polinomio $P(z)$ satisfacen

$$\text{Im} \left(\frac{\alpha_i - z_0}{u} \right) < 0. \quad (2.1)$$

La idea de la demostración consiste en hacer un “cambio de variable” de modo que la recta L se cambie por el eje real, y aplicar el caso particular anterior. Sea

$$g(z) = \frac{1}{u}z + z_0;$$

entonces, $P(g(z))$ es un polinomio; de hecho, si $P(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$, podemos escribir

$$P(g(z)) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n) = \frac{a_n}{\bar{u}^n} (z - (\alpha_1 - z_0)\bar{u}) \cdots (z - (\alpha_n - z_0)\bar{u}),$$

de modo que las raíces de $P(g(z))$ son $\beta_i = (\alpha_i - z_0)\bar{u}$; además,

$$\text{Im}((\alpha_i - z_0)\bar{u}) = \text{Im} \left(\frac{(\alpha_i - z_0)\bar{u} \cdot u}{u} \right) = \text{Im} \left(\frac{\alpha_i - z_0}{u} \right) < 0.$$

Así, las raíces de $P(g(z))$ tienen parte imaginaria negativa y por el caso particular del teorema, ya demostrado, las raíces $\tilde{\beta}_i$ de su derivada $(P \circ g)'(z)$ satisfacen $\text{Im}(\tilde{\beta}_i) < 0$. Por la *regla de la cadena*³, tenemos que

$$0 = (P \circ g)'(\tilde{\beta}_i) = \frac{1}{u}P'(g(\tilde{\beta}_i)),$$

³que demostraremos un poco más adelante!

de modo que $g(\tilde{\beta}_i)$ es raíz de $P'(z)$. El lector podrá argumentar por qué los números $g(\tilde{\beta}_i)$ son justamente todas las raíces de $P'(z)$. Veamos entonces que estos números satisfacen (2.1):

$$\operatorname{Im} \left(\frac{g(\tilde{\beta}_i) - z_0}{u} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{\beta}_i}{u\bar{u}} \right) = \operatorname{Im}(\tilde{\beta}_i) < 0,$$

lo que concluye la demostración en el caso general. \square

Para cerrar esta parte, mencionemos brevemente a las funciones racionales. Por definición, una *función racional* está dada como el cociente de dos polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde estamos suponiendo que P y Q no tienen factores en común. En principio, esta función no está definida en los ceros⁴ de Q , pero podemos extender la función al conjunto de los complejos extendidos $\hat{\mathbb{C}}$.

Exponencial y logaritmo

La *exponencial* del número complejo $z = x + iy$ se define como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Como de costumbre, también escribiremos e^z como $\exp(z)$ en casos convenientes.

Como motivación para esta definición, podemos argumentar intuitivamente como sigue. Más adelante mostraremos que cualquier función derivable (en el sentido complejo, concepto que por supuesto también definiremos) es igual a su serie de Taylor. Además, nos interesa que esta función generalice a la exponencial real y por tanto comparta muchas de sus propiedades. Así, si $z = x + iy$, queremos por ejemplo que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

donde e^x debe ser exactamente la exponencial real, ya conocida. Así que sólo resta ver cuál es la manera conveniente de definir e^{iy} . Como ya conocemos la serie de Taylor de la exponencial real, queremos que

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots;$$

lo que podemos ordenar como

$$\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots \right);$$

reconocemos cada una de estas series como la de $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$.

A continuación reuniremos varias propiedades de esta función.

⁴Nótese que antes llamamos *raíces* del polinomio a estos puntos. Poco a poco iremos introduciendo esta notación.

Proposición 2.12. *La función exponencial cumple lo siguiente:*

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{i\theta}| = 1$; en particular,

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

- $e^{z+w} = e^z e^w$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.
- \exp no es inyectiva; de hecho, es periódica con periodo $2\pi i$.
- \exp siempre es distinta de cero y es suprayectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Las afirmaciones del primer punto son consecuencia sencilla de la definición de \exp y se dejan al lector. El segundo punto se demuestra también con un cálculo: Si $z = x + iy$ y $w = a + ib$, entonces por un lado

$$e^{z+w} = e^{x+a}(\cos(y+b) + i \operatorname{sen}(y+b)),$$

y por otro,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) \\ &= e^x e^a ((\cos y \cos a - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} b) + i(\cos y \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} y \cos b)) \\ &= e^{x+a}(\cos(y+b) + i \operatorname{sen}(y+b)). \end{aligned}$$

Para el tercer punto, observemos que para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

Para el cuarto punto, observemos primero que

$$|e^z| = |e^x| \cdot |\cos y + i \operatorname{sen} y| = e^x \neq 0.$$

Ahora, veamos que \exp es suprayectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea

$$w = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$$

en este conjunto, de modo que $r_0 > 0$. Queremos ver si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$; es decir, tal que

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0).$$

Entonces $e^x = r_0$ y $y = \theta_0$ módulo 2π , de modo que los números $z = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, cumplen que $e^z = w$. \square

Observación 2.13. El hecho de que $e^z = e^{z+i2\pi k}$, donde k es cualquier entero, nos permite dar una interpretación geométrica del comportamiento de la exponencial: Si consideramos una franja horizontal de ancho 2π , por ejemplo, una que vaya de $y = -\pi$ a $y = \pi$, entonces los puntos $x - i\pi$ y $x + i\pi$ de las fronteras inferior y superior de la franja van a dar al mismo valor bajo la exponencial, de modo que si pensamos al plano complejo como una hoja de papel (infinita),

podemos *identificar* estos puntos, lo que nos produce un cilindro circular. Cada uno de los cortes circulares de este cilindro va a dar a una circunferencia con centro en el origen. Podemos pensar que deformamos el cilindro en una *trompeta* y luego la aplastamos sobre el plano complejo. En general, podemos pensar que la exponencial *enrolla* a todo el plano complejo en esta trompeta y luego lo aplasta.

La proposición 2.12 nos dice que la exponencial compleja comparte algunas propiedades con la exponencial real, pero no todas. La exponencial real es creciente y por tanto tiene una inversa, el conocido logaritmo natural. Por otro lado, debido a que \exp es periódica y por tanto no inyectiva, no podemos definir una sola función inversa de la exponencial. Lo que sí podemos hacer es *restringir* el dominio de la exponencial compleja, para que sea inyectiva en ese dominio. Como \exp tiene periodo $2\pi i$, es natural considerar cualquier franja horizontal de ancho 2π ; en forma explícita, sean $y_0 \in \mathbb{R}$ y

$$A_{y_0} = \{ x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi \}.$$

Proposición 2.14. *Para cualquier y_0 , la exponencial compleja manda la franja A_{y_0} sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de manera biyectiva.*

Demostración. Mostremos la inyectividad: Sean

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

números complejos tales que $y_0 \leq y_1, y_2 < y_0 + 2\pi$ y $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. Calculando los módulos en esta última expresión, tenemos que $\exp(x_1) = \exp(x_2)$, de modo que $x_1 = x_2$. Entonces $z_1 - z_2 = i(y_1 - y_2)$ y por tanto $\exp(i(y_1 - y_2)) = 1$. Esto implica (¡ejercicio!) que $y_1 - y_2 = 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Como $|y_1 - y_2| < 2\pi$, esto sólo puede ocurrir si $k = 0$, es decir, cuando $y_1 = y_2$.

Probemos ahora la suprayectividad. En la demostración de la proposición 2.12, vimos que dado un número complejo $w = r_0(\cos \theta_0 + i \sen \theta_0)$, $r_0 > 0$, el número

$$z = \ln r_0 + i\theta_0 \tag{2.2}$$

cumple que $e^z = w$. Por la periodicidad de la exponencial, todos los números de la forma

$$z = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

satisfacen que $e^z = w$. Puesto que la franja A_{y_0} tiene ancho exactamente igual a 2π , alguno de estos números cae en A_{y_0} , lo que concluye la demostración. \square

La ecuación (2.2) sugiere una definición.

Definición 2.15. Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Definimos la *rama del logaritmo de z en A_{y_0}* como la función $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow A_{y_0}$ que a cada $z = r(\cos \theta + i \sen \theta) \neq 0$ le asocia

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi k),$$

donde k es el único entero tal que $y_0 \leq \theta + 2\pi k < y_0 + 2\pi$.

Observación 2.16. En la definición anterior, el número $\theta + 2\pi k$ recibe el nombre de el *argumento de z* (con respecto de la rama del logaritmo en A_{y_0}) y se denota por $\arg z$. Aunque podemos adoptar cualquier rama en nuestras definiciones, dos son preferidas sobre las demás:

- Una cuando $y_0 = 0$, de modo que elegimos el argumento de z en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- La otra cuando $y_0 = -\pi$, de modo que elegimos el argumento de z en $[-\pi, \pi)$. En lo sucesivo a ésta se le llamará la *rama principal del logaritmo*.

Proposición 2.17. *El logaritmo es la función inversa de la exponencial, en el siguiente sentido:*

1. Para cualquier rama del logaritmo, $\exp(\log z) = z$ para todo $z \neq 0$.
2. Dada una rama del logaritmo en A_{y_0} y $z \in A_{y_0}$, entonces $\log(\exp z) = z$.

Demostración. Primero, sabemos que si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$, entonces el logaritmo de z en cualquier rama tiene la forma

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi k);$$

ahora, por la periodicidad de la exponencial,

$$\exp(\log z) = \exp(\ln r + i(\theta + 2\pi k)) = \exp(\ln r + i\theta) = e^{\ln r}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = z.$$

Ahora, consideremos $z \in A_{y_0}$; es decir, $z = x + iy$ con $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$. Entonces

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

y

$$\log(\exp(z)) = \ln(e^x) + i(y + 2\pi k) = x + i(y + 2\pi k),$$

donde k es el único entero tal que $y_0 \leq y + 2\pi k < y_0 + 2\pi$. De aquí tenemos que $k = 0$, por lo que $\log(\exp(z)) = z$. \square

Observación 2.18. El uso de las franjas A_{y_0} tiene un problema. Ilustremos esto con un caso particular, digamos, cuando $y_0 = -\pi$, de modo que incluimos los puntos $x - i\pi$ y descartamos los puntos $x + i\pi$. Entonces ¡el logaritmo no es una función continua! Para ver esto, tomamos una sucesión z_n que tienda a -1 por abajo del eje real, digamos $-1 + iy_n$ donde $y_n \rightarrow 0^-$ por la izquierda. Entonces $\log(z_n) \rightarrow -i\pi$, mientras que si tomamos una sucesión z'_n que tienda a -1 por arriba del eje real, tendremos $\log(z'_n) \rightarrow i\pi$. Este problema se puede resolver fácilmente al considerar sólo franjas *abiertas*.

Funciones trigonométricas y potencias arbitrarias

Con la exponencial y el logaritmo en nuestras manos, podemos definir algunas funciones que extienden a funciones reales conocidas.

Primero usaremos la exponencial compleja para definir las funciones trigonométricas. Como motivación, supongamos que $y \in \mathbb{R}$; entonces

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y,$$

de donde

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Definición 2.19. Sea $z \in \mathbb{C}$. Definimos el *seno* y el *coseno* de z como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

La demostración del siguiente resultado se deja como ejercicio.

Proposición 2.20. Para todo $z, w \in \mathbb{C}$,

- El seno y el coseno son funciones periódicas con periodo 2π ; es decir,

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi k) = \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad \cos(z + 2\pi k) = \cos z.$$

- $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$.
- $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$.
- $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$.

También podemos extender la noción de elevar un número a una potencia, definiendo

$$z^w = e^{w \log z},$$

donde elegimos (y fijamos) una rama de \log . Claro que cada vez que extendemos una definición, debemos ver que la extendimos de manera adecuada. En particular, debe ocurrir que:

- Si $w = n \in \mathbb{Z}$, entonces $z^w = z^n$ asume un único valor, sin depender de la rama elegida para el logaritmo.
- Si $w = 1/q$, donde $q \in \mathbb{N}$, entonces $z^{1/q}$ asume q valores para las distintas ramas del logaritmo. Cuando consideramos la rama principal para evaluar $z^{1/q}$, este número se llama la *q-ésima raíz principal* de z .

Estas afirmaciones se siguen inmediatamente del hecho de que al tomar una rama arbitraria del logaritmo, entonces el logaritmo de z en esa rama se puede escribir como

$$\ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $\arg z$ se toma en la rama principal, es decir, entre $-\pi$ y π .

2.3. Transformaciones de Möbius

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ números complejos con $ad - bc \neq 0$. Consideremos una transformación de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

En realidad, es más conveniente considerar este tipo de transformaciones en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para esto, observemos que la regla anterior no está determinada cuando $z = -d/c$. Así, definimos $T(-d/c) = \infty$. Por otro lado, observemos que cuando $z \rightarrow \infty$, $T(z) \rightarrow a/c$, de modo que definimos $T(\infty) = a/c$.

Definición 2.21. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con $ad - bc \neq 0$. Una *transformación de Möbius* es una función racional $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{si } z \neq -d/c, \infty \\ \infty, & \text{si } z = -d/c, \\ a/c, & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Observación 2.22. En el caso de que $ad - bc = 0$, se puede mostrar que la expresión $(az + b)/(cz + d)$ se reduce a una constante.

Algunos ejemplos conocidos de transformaciones de Möbius son:

- La transformación identidad $z \mapsto z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$;
- Las traslaciones $z \mapsto z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}$;
- Las rotaciones $z \mapsto e^{i\theta} z = \frac{e^{i\theta} \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$;
- Las homotecias $z \mapsto az = \frac{az + 0}{0 \cdot z + 1}$;
- La inversión $z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$.

Proposición 2.23. *Toda transformación de Möbius es una biyección de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$. De hecho, T^{-1} también es una transformación de Möbius. En consecuencia, el conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo bajo la operación de composición.*

Demostración. Sea T dada como en (2.3). Mostraremos primero que T es inyectiva. Si $T(z_1) = T(z_2)$, entonces (salvo algunos casos sencillos) tenemos que

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d},$$

de modo que $adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1$ o $(ad - bc)(z_1 - z_2) = 0$. Como $ad - bc \neq 0$, tenemos que $z_1 = z_2$.

Para mostrar que T es suprayectiva, sea $w \neq a/c, \infty$. Entonces buscamos z tal que

$$\frac{az + b}{cz + d} = w,$$

de donde

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

y tenemos el resultado. \square

Para analizar estas transformaciones, usaremos la siguiente *descomposición*:

Proposición 2.24. *Cualquier transformación de Möbius se puede expresar como la composición de traslaciones, homotecias y de la inversión.*

Demostración. La transformación (2.3) se puede escribir como la composición $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, donde

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z, \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c}. \quad \square$$

Puesto que ya conocemos bastante bien el comportamiento geométrico de las traslaciones y las homotecias, nos detendremos a analizar algunos aspectos de la transformación $1/z$. En primer lugar, es claro que esta transformación manda una circunferencia con centro en el origen (y radio r) en otra circunferencia con centro en el origen (y radio $1/r$). En general, tenemos la siguiente situación.

Proposición 2.25. *La inversión $z \rightarrow 1/z$ manda al conjunto de rectas y circunferencias en el conjunto de rectas y circunferencias.*

Demostración. Recordemos que la ecuación

$$A|z|^2 + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad E = \frac{1}{2}(B + iC).$$

representa una recta si $A = 0$ y una circunferencia si $A \neq 0$. Dividiendo entre $|z|^2 = z\bar{z}$, tenemos

$$A + \bar{E}\frac{1}{\bar{z}} + E\frac{1}{z} + D\frac{1}{|z|^2} = 0,$$

lo que nos dice que los puntos $T(z) = 1/z$ están sobre una recta si $D = 0$ o en una circunferencia si $D \neq 0$. \square

Debido a la proposición 2.24, tenemos lo siguiente.

Corolario 2.26. *Toda transformación de Möbius manda al conjunto de rectas y circunferencias en el conjunto de rectas y circunferencias.*

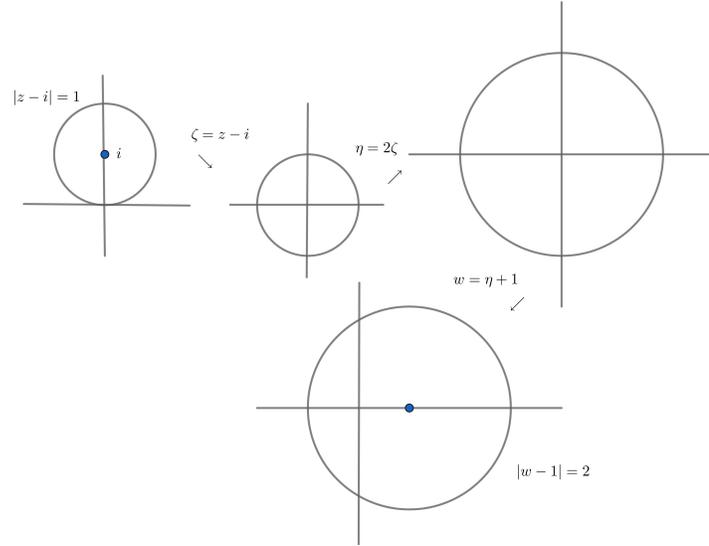


Figura 2.1: Un ejemplo de transformación de Möbius.

Ejemplo 2.27. Veamos un ejemplo sencillo de lo anterior. Buscaremos una transformación de Möbius que lleve la circunferencia $|z - i| = 1$ en la circunferencia $|w - 1| = 2$. La idea geométrica consiste en primero trasladar el centro i de la primera circunferencia en el origen, luego hacer una homotecia y finalmente volver a trasladar el centro. Usando la notación de la figura 2.1, tenemos que

$$w = \eta + 1 = (2\zeta) + 1 = 2(z - i) + 1 = 2z + (1 - 2i).$$

Se sugiere ver en YouTube el video *Moebius Transformations Revealed*, donde se explica cómo se pueden ver estas transformaciones sobre la esfera de Riemann. A continuación daremos unas propiedades adicionales de estas transformaciones.

Proposición 2.28. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. Toda transformación de Möbius diferente de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos.
2. Sean $z_i, w_i, i = 1, 2, 3$ números complejos (extendidos) tales que $z_i \neq z_j$ y $w_i \neq w_j$ para $i \neq j$. Entonces existe una única transformación de Möbius tal que $T(z_i) = w_i$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Demostración. 1. Supongamos que T es de la forma (2.3) y que ∞ es un punto fijo de T , lo cual ocurre si y sólo si $c = 0$; esto implica que $T(z) = a'z + b'$ con $a' \neq 0$. Si z es otro punto fijo de T distinto de ∞ , entonces $(a' - 1)z + b' = 0$. Si $a' \neq 1$, obtenemos que $z = b'/(1 - a')$; si $a' = 1$, entonces $b' = 0$ y T se reduce a la identidad.

Supongamos ahora que ∞ no es un punto fijo de T y por tanto que $c \neq 0$. Tenemos entonces la ecuación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z,$$

de donde $cz^2 + (d-a)z - b = 0$; como $c \neq 0$, esto es una ecuación cuadrática con a lo más dos soluciones distintas; es decir T tiene a lo más dos puntos fijos.

2. Primero mostraremos la unicidad de la transformación. Supongamos que T, S son transformaciones de Möbius tales que $T(z_i) = w_i = S(z_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$. Como las transformaciones de Möbius son invertibles, tenemos que $S^{-1} \circ T(z_i) = z_i$ para cada i , de modo que la transformación de Möbius $S^{-1} \circ T$ tiene tres puntos fijos. Por el inciso anterior, esta transformación debe ser la identidad, lo que implica que $T = S$.

Para mostrar la existencia de T , primero mostraremos un caso particular: Veamos que existe una transformación de Möbius tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$. Es fácil convencerse de que $T(z_1) = 0$ ocurre si y sólo si podemos escribir $T(z)$ como el producto de $(z - z_1)$ por alguna función; análogamente, $T(z_3) = \infty$ si y sólo si $T(z)$ se puede escribir como $1/(z - z_3)$ por alguna función, de modo que hasta ahora

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} h(z)$$

para alguna función h , posiblemente constante. De hecho, h es constante y viene dada por la condición $T(z_2) = 1$. Es fácil convencerse de que

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (2.4)$$

satisface las condiciones pedidas. Si ahora consideramos la transformación análoga

$$T(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1},$$

entonces $S^{-1} \circ T(z_i) = w_i$ para cada $i = 1, 2, 3$. \square

Ejemplo 2.29. Consideremos la transformación

$$T(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

y observemos que $T(1) = 0$, $T(0) = -1$ y que $\pm i$ son puntos fijos de T . Como los tres puntos $-i, 0, i$ son colineales, la imagen de estos puntos debe estar en una recta o una circunferencia. Como las imágenes son $-i, -1, i$ respectivamente y estos tres puntos determinan una circunferencia (a saber, la circunferencia unitaria), sabemos que T manda el eje imaginario en la circunferencia unitaria. Además, como $T(1) = 0$, es fácil ver que T lleva el semiplano derecho de \mathbb{C} en el disco unitario $|z| < 1$. Ver la figura 2.2.

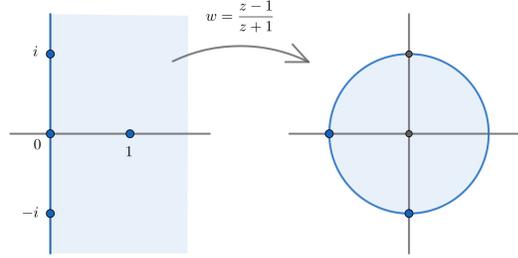


Figura 2.2: Un ejemplo de transformación de Möbius.

La transformación que aparece en (2.4) es importante. Usaremos la notación

$$T(z) = (z; z_1, z_2, z_3)$$

para referirnos a esta transformación y la llamaremos *razón cruzada* de los números complejos z, z_1, z_2, z_3 .

Proposición 2.30. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La razón cruzada $(z; z_1, z_2, z_3)$ es un número real si y sólo si los números z, z_1, z_2, z_3 están en una misma circunferencia (o recta).*
2. *Toda transformación de Möbius preserva la razón cruzada.*

Demostración. 1. La demostración es clara si pensamos en la razón cruzada como una transformación de Möbius T : Se tiene que $(z; z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ si y sólo si $T(z)$ está en la recta que pasa por $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$. Como T es invertible y su inversa es también una transformación de Möbius, lo anterior pasa si y sólo si z está en la circunferencia (o recta) que pasa por z_1, z_2, z_3 .

2. Sea S una transformación de Möbius; queremos ver que

$$(z; z_1, z_2, z_3) = (S(z); S(z_1), S(z_2), S(z_3));$$

pero observemos que el lado derecho de esta ecuación es nuevamente una transformación de Möbius, que cumple

$$\begin{aligned} (S(z_1); S(z_1), S(z_2), S(z_3)) &= 0, \\ (S(z_2); S(z_1), S(z_2), S(z_3)) &= 1, \\ (S(z_3); S(z_1), S(z_2), S(z_3)) &= \infty; \end{aligned}$$

el resultado se sigue entonces por unicidad. \square

Las transformaciones tienen muchas otras propiedades importantes, pero por el momento sólo diremos que entre otras cosas nos servirán para definir la *distancia* en varios modelos de la geometría hiperbólica.

2.4. Funciones analíticas

La derivada de una función de variable compleja se define de manera análoga al caso real.

Definición 2.31. Sean $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in A$ punto de acumulación de A . Si el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.5)$$

existe, decimos que f es \mathbb{C} -diferenciable en z_0 y que dicho límite es la *derivada* de f en z_0 , denotada como $f'(z_0)$ o $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Las propiedades usuales de la derivada se cumplen en nuestro caso complejo, por ejemplo:

1. Si f es \mathbb{C} -diferenciable en z_0 , entonces f es continua en z_0 .
2. Si $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ son \mathbb{C} -diferenciables en z_0 , también lo son su suma, su producto y su cociente (en este último caso, pedimos que $g(z_0) \neq 0$), y se cumplen las fórmulas de derivación que conocemos del cálculo de funciones reales.
3. La composición de funciones \mathbb{C} -diferenciables también es \mathbb{C} -diferenciable y se cumple la *regla de la cadena* usual.

Pero entonces, ¿para qué tanto relajo con las funciones complejas? ¿Por qué un curso de ellas? En todo el curso iremos justificando esto, pero por lo pronto estableceremos una definición fundamental.

Definición 2.32. Sean $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

- Sea z_0 un punto interior de A . Decimos que f es *analítica* (u *holomorfa*) en z_0 si existe una vecindad (abierto) U de z_0 en A tal que $f'(z)$ existe en cada punto $z \in U$;
- Si A es un conjunto abierto, decimos que f es *analítica en A* si f es analítica en cada punto de A .
- Una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida en todo el plano complejo es *entera* si f es analítica en \mathbb{C} .

Ejemplo 2.33. Usando los mismos argumentos que en el caso real, es fácil convencerse de que la función $z \mapsto z^2$ es entera y que su derivada es igual a $2z$ para todo z . Por otro lado, analicemos la función

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = |z|^2.$$

Si $z_0 = 0$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0,$$

de modo que la función es \mathbb{C} -diferenciable en 0. Pero si $z_0 \neq 0$, veamos que el límite que define a $f'(z_0)$ no existe: Si nos aproximamos a z_0 a lo largo de la recta tz_0 , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{|tz_0|^2 - |z_0|^2}{tz_0 - z_0} = \lim_{t \rightarrow 1} (t+1)\bar{z}_0 = 2\bar{z}_0 \neq 0;$$

si escribimos $z_0 = re^{i\theta_0}$ y nos acercamos a z_0 a lo largo de la circunferencia con centro en el origen que pasa por z_0 , tenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{|re^{i\theta}|^2 - |re^{i\theta_0}|^2}{re^{i\theta} - re^{i\theta_0}} = 0.$$

Así, esta función no es analítica en $z_0 \neq 0$, pues este punto no posee una vecindad donde $f'(z)$ exista.

Observación 2.34. En general, las funciones que consideraremos estarán definidas en regiones $U \subset \mathbb{C}$; es decir, conjuntos abiertos y conexos. Así, supondremos que U cumple esto de aquí en adelante.

El siguiente resultado nos dice que las funciones analíticas tienen propiedades un tanto especiales.

Proposición 2.35. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en z_0 . Si $f = u + iv$, entonces u, v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Demostración. Como $f'(z_0)$ existe, entonces el límite en (2.5) existe para cualquier forma de acercarse a z_0 . Primero nos acercamos por una recta paralela al eje real:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0);$$

lo que por cierto podemos escribir como $\partial f / \partial x$. Por otro lado, si nos acercamos a z_0 por una recta paralela al eje imaginario, $f'(z_0)$ es igual a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0),$$

(lo que se denota $-i\partial f / \partial y$); así, al igualar las partes real e imaginaria de las dos formas de acercarnos, obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

Este resultado sugiere que no cualquier función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ derivable en el sentido del Cálculo Diferencial en \mathbb{R}^2 se puede pensar como una función analítica $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Regresando a nuestro ejemplo sencillo de función analítica $z \mapsto z^2$, vemos que sus partes real e imaginaria $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Un ejemplo de función que *no*

es analítica es $z \mapsto \bar{z}$. (¿Dónde dejan de cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemann?)

Como otra ilustración un poco más sorprendente de que las funciones analíticas no se comportan como las funciones en \mathbb{R}^2 , tenemos:

Proposición 2.36. *Sean U una región de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que la imagen de f está contenida en el eje real. Entonces f es constante.*

Demostración. Si $f = u + iv$, el hecho de que la imagen de f esté contenida en el eje real dice que v es idénticamente cero. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que las derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ también son idénticamente nulas, de modo que u es constante y por tanto lo mismo ocurre con f . \square

Un argumento similar muestra que si U es una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y la imagen de f está contenida en el eje imaginario, entonces f es constante. El argumento se puede modificar para el caso en que la imagen de f está contenida en una recta L : Es fácil encontrar una función $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica, invertible (y con inversa también analítica) tal que la imagen de L bajo g caiga en el eje real. (Una transformación $g(z) = az + b$ puede servir.) Entonces $g \circ f$ satisface las hipótesis de la proposición, de modo que $g \circ f(z) = c$, constante. Pero entonces $f(z) = g^{-1}(c)$, constante.

Un argumento más elaborado muestra que si U es conexo, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y la imagen de f está contenida en una circunferencia C , también f es constante. Haciendo uso de la *inversión* $z \mapsto 1/z$ y algunas homotecias y traslaciones, se puede encontrar una función $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica, invertible (y con inversa también analítica) tal que la imagen de C bajo g caiga en el eje real. El resto es idéntico al caso de L .

Tenemos también el siguiente resultado, que demostraremos posteriormente; ver el Teorema 3.29.

Teorema 2.37 (de Liouville). *Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que la imagen de f está acotada (es decir, contenida en un disco). Entonces f es constante.*

En la proposición 2.35 mostramos que si f es analítica, entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En los ejercicios 14 y 15 de este capítulo mostramos dos contraejemplos a variantes del recíproco de esta afirmación, mientras que ahora mostraremos dos recíprocos parciales. Para el primero de ellos, debido a Goursat, supondremos que las funciones u y v y sus primeras derivadas parciales son continuas.⁵

Teorema 2.38. *Sean U una región de \mathbb{C} y $u, v: U \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tales que*

- las derivadas $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ existen en cada punto de U ;
- u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U ;
- u, v son continuas en U ;

⁵Más adelante veremos que en realidad, cualquier función analítica será de clase C^∞ .

- las derivadas $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ son continuas en U ;

entonces $f = u + iv$ es analítica en U .

Demostración. Veamos que $f'(z_0)$ existe para cada $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Como u, v son de clase C^1 , en una vecindad de z_0 podemos escribir

$$u(z) = u(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(z)$$

y

$$v(z) = v(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + \varepsilon_2(z),$$

donde los errores ε_i satisfacen $\varepsilon_i(z)/(z - z_0) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$. Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, tenemos

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(z - z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)(z - z_0) + (\varepsilon_1(z) + i\varepsilon_2(z));$$

dividiendo entre $(z - z_0)$ y tomando el límite,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varepsilon_1(z) + i\varepsilon_2(z)}{z - z_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \end{aligned}$$

lo que demuestra la existencia del límite requerido. \square

Para ver un segundo recíproco parcial de la proposición 2.35, conviene comparar la definición de diferenciabilidad de una función vista en \mathbb{R}^2 con la definición en el caso complejo. Observemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

es equivalente a que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|. \quad (2.7)$$

Recordemos que esto se parece a la definición de *función diferenciable* en \mathbb{R}^2 : $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable si y sólo si existe una transformación lineal $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ representada de manera matricial como $L(x) = Ax$, con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$\|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)\| < \epsilon\|z - z_0\|; \quad (2.8)$$

en este caso, A es la *matriz derivada* Df_{z_0} y está dada por

$$Df_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donde cada derivada parcial se evalúa en z_0 .

Teorema 2.39. Sean U una región de \mathbb{C} y $u, v: U \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tales que

- las derivadas $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ existen en cada punto de U ;
- u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U ;
- u, v son continuas en U ;
- $f = (u, v)$ es diferenciable en U (como función en \mathbb{R}^2);

entonces $f = u + iv$ es analítica en U .

Demostración. Dado $z_0 \in U$, mostraremos que existe $f'(z_0)$; o, en forma equivalente, que se satisface (2.7). Sabemos que f es diferenciable como transformación en \mathbb{R}^2 , de modo que la matriz Df_{z_0} satisface la propiedad (2.8). Como las derivadas parciales de u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la matriz Df_{z_0} se ve como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

donde de nuevo las derivadas parciales se evalúan en z_0 ; al multiplicar por el vector columna $(x - x_0, y - y_0)$ obtenemos el vector

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)(y - y_0), -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(y - y_0) \right),$$

el cual se identifica con el producto de números complejos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right) (z - z_0);$$

así, reinterpretando (2.8) en términos de números complejos, tenemos que $f'(z_0)$ existe y es precisamente el número

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right). \quad \square$$

Los resultados anteriores sugieren buscar hipótesis más débiles que, junto con las condiciones de Cauchy-Riemann, impliquen que una función sea analítica. Para cerrar esta sección mencionaremos, sin demostrarlo, un notable resultado en esta dirección, el teorema de Looman-Menchoff. Para su prueba y una agradable introducción histórica a esta temática, ver [5].

Teorema 2.40. Sean U una región de \mathbb{C} y $u, v: U \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tales que

- las derivadas $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ existen en cada punto de U ;
- u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U ;
- u, v son continuas en U ;

entonces $f = u + iv$ es analítica en U .

2.5. Transformaciones conformes

En esta sección veremos que toda función analítica con derivada diferente de cero es *conforme* (o bien, preserva ángulos). Aunque ya hicimos mención de esta propiedad en el caso de la proyección estereográfica, daremos una definición precisa en el caso de una función en el plano complejo.

Definición 2.41. Sean $\alpha, \beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas tales que $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, de modo que $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ sean diferentes de cero. El *ángulo* entre las curvas (en z_0) se define como el ángulo entre sus vectores tangentes.

Si pensamos las curvas como en \mathbb{R}^2 , con su producto punto usual, tenemos que

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \cos \angle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\|\alpha'(0)\| \|\beta'(0)\|}.$$

¿Cómo escribimos lo anterior con notación compleja? Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de los vectores $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$, entonces sabemos que el producto punto de ellos es $x_1y_1 + x_2y_2$. Si pensamos a estos vectores como números complejos, tenemos que

$$\alpha'(0) \overline{\beta'(0)} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2);$$

así,

$$\cos \angle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha'(0) \overline{\beta'(0)}}{|\alpha'(0)| |\beta'(0)|} \right). \quad (2.9)$$

Ya estamos listos para lo anunciado.

Proposición 2.42. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $z_0 \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces f es conforme en z_0 ; es decir, para cualesquiera curvas $\alpha, \beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ y $\alpha'(0), \beta'(0) \neq 0$ se tiene

$$\angle(\alpha, \beta) = \angle(f \circ \alpha, f \circ \beta).$$

Demostración. La regla de la cadena implica que $(f \circ \alpha)'(0) = f'(\alpha(0))\alpha'(0) = f'(z_0)\alpha'(0) \neq 0$; análogamente $(f \circ \beta)'(0) \neq 0$, de modo que podemos calcular $\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta)$ con la expresión (2.9):

$$\begin{aligned} \cos \angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) &= \operatorname{Re} \left(\frac{(f \circ \alpha)'(0) \overline{(f \circ \beta)'(0)}}{|(f \circ \alpha)'(0)| |(f \circ \beta)'(0)|} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z_0)\alpha'(0) \overline{f'(z_0)\beta'(0)}}{|f'(z_0)\alpha'(0)| |f'(z_0)\beta'(0)|} \right) \\ &= \frac{|f'(z_0)|^2}{|f'(z_0)|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha'(0) \overline{\beta'(0)}}{|\alpha'(0)| |\beta'(0)|} \right) = \cos \angle(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

de lo cual se desprende nuestra afirmación. \square

Veamos otra manera más geométrica de argumentar lo anterior: Puesto que $(f \circ \alpha)'(0) = f'(z_0)\alpha'(0) \neq 0$, la acción de $f'(z_0)$ sobre cada vector tangente $\alpha'(0)$ es simplemente la multiplicación por un número complejo, lo que sabemos consiste en hacer una homotecia con razón de homotecia $|f'(z_0)|$ y girar con un ángulo $\arg(f'(z_0))$. Es claro que dicha acción preserva ángulos.

2.6. Teorema de la función inversa

Para enunciar este teorema y demostrarlo en el caso complejo, primero recordemos el enunciado correspondiente para funciones en \mathbb{R}^2 :

Teorema 2.43 (de la función inversa para \mathbb{R}^2). Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 tal que

$$\det(Df_{(x_0, y_0)}) \neq 0.$$

Entonces existen vecindades U' de (x_0, y_0) y V' de $f(x_0, y_0)$ donde está definida la inversa $f^{-1}: V' \rightarrow U'$; además, f^{-1} es de clase C^1 y

$$Df^{-1}(f(x_0, y_0)) = (Df_{(x_0, y_0)})^{-1}.$$

Veamos ahora este teorema desde un punto de vista *complejo*, de modo que identifiquemos (x_0, y_0) con z_0 como de costumbre. Si $f = u + iv$ ahora es analítica, sabemos que cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann, de modo que su derivada Df se ve como la matriz

$$Df_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

evaluada en z_0 ; observemos que el determinante de la última matriz es

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2,$$

de modo que el determinante de Df_{z_0} es distinto de cero si y sólo si pasa lo mismo con $f'(z_0)$.

Ahora, supongamos que la matriz Df_{z_0} de arriba es invertible. ¿Qué forma tiene su matriz inversa? Recordemos que si una matriz tiene inversa, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

de modo que en el caso de nuestra matriz en cuestión,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

es decir, la inversa tiene una forma análoga. Con todos estos comentarios, ya podemos enunciar el

Teorema 2.44 (de la función inversa para \mathbb{C}). Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $z_0 \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación analítica⁶ de clase C^1 tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen vecindades U' de z_0 y V' de $f(z_0)$ donde está definida la inversa $f^{-1}: V' \rightarrow U'$; además, f^{-1} es analítica y

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Demostración. Para casi todas las conclusiones, basta aplicar el teorema de la función inversa para \mathbb{R}^2 ; de hecho, sólo resta mostrar que f^{-1} es analítica. Para esto, escribimos $f^{-1} = u^* + iv^*$. Por la observación anterior al enunciado del teorema, tenemos que la matriz de f^{-1} (como transformación en \mathbb{R}^2) tiene la forma

$$D(f^{-1})_{f(z_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial x} & \frac{\partial u^*}{\partial y} \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} & \frac{\partial v^*}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{\partial v^*}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{b}{a^2 + b^2} = -\frac{\partial v^*}{\partial x},$$

es decir, u^*, v^* cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. Como f^{-1} es de clase C^1 , podemos aplicar el teorema 2.38 para obtener que f^{-1} es analítica. \square

2.7. Funciones armónicas

Tal vez el lector ya conozca el *operador laplaciano* Δ , que opera sobre funciones definidas en \mathbb{R}^2 . Más precisamente, dada una función $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, donde x, y son coordenadas cartesianas, entonces

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Definición 2.45. Una función $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es *armónica* en U si y sólo si $\Delta u(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in U$.

Poco a poco se irá viendo la importancia de las funciones armónicas en el ámbito de las funciones analíticas, las ecuaciones diferenciales parciales, la física y un largo etcétera. Pero para comenzar, veamos la relación de estas funciones con nuestro tema de estudio:

Teorema 2.46. Sea $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función con $f = u + iv$. f es analítica en U si y sólo si u, v son funciones armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (2.6) en U .

⁶Más adelante veremos que cualquier función analítica es C^1 , de modo que esta hipótesis será innecesaria.

Demostración. Primero supongamos que f es analítica. La Proposición 2.35 garantiza que las funciones u, v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Para continuar, supondremos⁷ que las funciones u, v son de clase C^2 y calcularemos el laplaciano de u :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

donde la última igualdad vale por nuestra hipótesis (provisional) de que $v \in C^2$. Análogamente,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de modo que tanto u como v son armónicas.

Para la afirmación recíproca, como u, v son de clase C^2 , obtenemos la conclusión a partir del Teorema 2.38. \square

Definición 2.47. Dos funciones u, v son *conjugadas armónicas* si y sólo si son armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann; o bien, si y sólo si la función $f = u + iv$ es analítica.

Es fácil obtener ejemplos de funciones conjugadas armónicas: Por ejemplo, como $f(z) = e^z$ es analítica, las funciones $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \sin y$ son conjugadas armónicas. Pero por otro lado, si sabemos que una función u es armónica, ¿tendrá siempre una función conjugada armónica v ? Veamos un sencillo ejemplo. Observemos que la función $u(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica. Una función conjugada armónica $v(x, y)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x,$$

y es fácil convencerse de que v debe tener la forma $v(x, y) = 2xy + c$, donde c es una constante.

Más adelante daremos una respuesta general a esta cuestión de la existencia de una función conjugada armónica, pero por el momento veamos un caso particular. Supongamos que u es una función armónica definida en un disco D con centro en $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que la función $u + iv$ debe satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann en todo punto, debemos tener

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y),$$

de modo que si integramos esta ecuación con respecto de y a lo largo de un segmento vertical que vaya de (x, y_0) a (x, y) , tenemos

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt + h(x),$$

⁷Como ya hemos mencionado en otra ocasión, más adelante mostraremos que cualquier función analítica f será de clase C^∞ , por lo que tendremos dicha condición de manera gratuita.

donde h es una función por determinar. Ahora, derivando con respecto de x y usando de nuevo las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - h'(x) \\ &= -\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt - h'(x) \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt - h'(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - h'(x) \end{aligned}$$

donde hemos usado (1) que podemos derivar dentro del signo de la integral, (2) que u es armónica. Así,

$$h'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0),$$

de donde

$$h(x) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds;$$

finalmente, una función conjugada armónica de u está dada por

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds + C.$$

Observación 2.48. Notemos que el procedimiento que hemos usado para encontrar el conjugado armónico de u en un disco D sólo depende del hecho de que podamos integrar a lo largo de segmentos horizontales y verticales contenidos en D . Así, este procedimiento se puede aplicar a otros conjuntos, como por ejemplo, rectángulos con lados paralelos a los ejes.

Como ya hemos dicho, las funciones armónicas aparecen en muy diversos contextos. Posteriormente mostraremos algunas propiedades fundamentales de estas funciones, de las cuales, como *publicidad*, mencionaremos una propiedad que mostraremos más adelante (Teorema 3.53):

Teorema (Principio del máximo). *Sean U una región acotada de \mathbb{C} y $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en \bar{U} y armónica en U . Entonces*

- *La función u alcanza su máximo en la frontera de U ; o bien,*
- *Si u alcanza su máximo en un punto interior de U , entonces u es constante.*

2.8. Ejercicios

1. Prueba que las siguientes funciones son continuas en \mathbb{C} .

- a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, c) $f(z) = \bar{z}$,
 b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, d) $f(z) = |z|$.

2. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $f(z) = f(2z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestra que f es constante en \mathbb{C} .

3. Determina las partes real e imaginaria de

$$\cos(1+i), \quad \operatorname{sen}(1+i), \quad \tan 2i.$$

4. Partiendo de las definiciones de las funciones en cuestión, demuestra las siguientes identidades:

- a) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$,
 b) $\cos(-z) = \cos z$,
 c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
 d) $\tan 2z = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$.

5. Define las funciones trigonométricas *hiperbólicas* para cada $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Demuestra las siguientes identidades:

- a) $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$,
 b) $\operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh} z \operatorname{cosh} w + \operatorname{cosh} z \operatorname{senh} w$.

6. Considera la rama principal del logaritmo. Determina las partes real e imaginaria de

$$\log(-1); \quad \log i; \quad \log \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

7. Como de costumbre, decimos que $w = \operatorname{arc} \cos z$ si $\cos w = z$. Demuestra que

$$\operatorname{arc} \cos z = -i \log(z \pm \sqrt{z^2 - 1}).$$

8. Determina las partes real e imaginaria de

$$(-2)^{\sqrt{2}}, \quad i^i, \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

9. Determina bajo qué condiciones ocurre que para todo $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\log z^w = w \log z.$$

10. ¿Es $1^w = 1$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
11. ¿Es cierto que $|z^w| = |z|^{|w|}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$?
12. Prueba que las siguientes funciones son analíticas en \mathbb{C} , mostrando que sus partes real e imaginaria son de clase C^1 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

a) $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$,

b) $f(z) = e^{z^2}$,

c) $f(z) = \cos z$,

13. Demuestra las siguientes formas complejas de la *regla de la cadena*:

- Si $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -diferenciable en z_0 y $g: B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -diferenciable en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es \mathbb{C} -diferenciable en z_0 y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

donde la expresión de la derecha es el producto de los números complejos $g'(f(z_0))$ y $f'(z_0)$.

- Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -diferenciable en U y $\alpha: I \rightarrow U$ es una curva diferenciable, entonces $f \circ \alpha$ es \mathbb{C} -diferenciable y

$$(f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha(t))\alpha'(t),$$

para todo $t \in I$; aquí, la expresión de la derecha es el producto de los números complejos $f'(\alpha(t))$ y $\alpha'(t)$.

14. Demuestra que la función

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}), & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo $z \in \mathbb{C}$, pero que $f'(0)$ no existe.

15. Demuestra que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

es continua en \mathbb{C} , satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero $f'(0)$ no existe.

16. Sean f y g funciones analíticas en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$, con $g \neq 0$ para todo $z \in U$. Prueba que el cociente f/g es analítico en U , con derivada

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

para todo $z \in U$.

17. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $z = x + iy$, podemos escribir

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = f(z, \bar{z}),$$

pensando a z y \bar{z} como variables independientes (aunque en realidad no lo son). Definimos las *derivadas de Wirtinger* mediante los símbolos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Muestra que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Así, se acostumbra decir que una función analítica *sólo depende de z* y no de \bar{z} , pero observen que esto es sólo una convención.

18. Si (r, θ) son las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 , de modo que ahora describimos a u, v como funciones de r y θ , muestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0.$$

19. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en una región U de \mathbb{C} . Supongamos que la $(n+1)$ -ésima derivada $f^{(n+1)}(z)$ existe y que es cero en U . Muestra que f es un polinomio de grado menor o igual a n .

20. Sea f analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$, $f = u + iv$ y supongamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

en U . Muestra que existen $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{C}$ constantes tales que $f(z) = -icz + d$.

21. Encuentra conjugadas armónicas de las siguientes funciones, indicando cuál es el dominio adecuado:

a) $u(x, y) = \sinh x \sin y$,

$$b) \ u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$c) \ u(x, y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

22. Demuestra que no existen funciones analíticas de la forma $f = u + iv$ tales que $u(x, y) = x^2 + y^2$.

23. En relación con el ejercicio 17, muestra que una función u es armónica si y sólo si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

24. Sea u una función armónica en una región U de \mathbb{C} . Prueba que si v_1 y v_2 son conjugadas armónicas de u , entonces v_1 y v_2 difieren por una constante real.

25. Usa el teorema de la función inversa para mostrar que si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, entonces f es una *función abierta*, es decir, manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

26. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica definida en una región U de \mathbb{C} de modo que $|f^2(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$. Demuestra que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ en todo U , o bien $\operatorname{Re} f(z) < 0$ en todo U .

27. Sean $D = \{|z| < 1\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z_0 \in D$. Muestra que la restricción a D de la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

es una biyección de D sobre sí mismo.

28. Sea z_0 un complejo con $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Muestra que la restricción de la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

al semiplano superior es una biyección de éste sobre el disco unitario D .

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1. Conceptos básicos

Ahora comenzaremos el tema de la integral de funciones de variable compleja. Comencemos con la siguiente definición, que es más o menos natural.

Definición 3.1. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, la cual podemos escribir como $f(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u(t), v(t)$ son funciones reales. Entonces la *integral* de f en $[a, b]$ es el número complejo

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Esta primera definición tiene las siguientes propiedades:

Proposición 3.2. *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. La integral es \mathbb{C} -lineal; es decir, para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continuas se tiene

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

2. Para cada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua se tiene

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$$

y también

$$\operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

3. Para cada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua se tiene

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Demostración. La demostración del primer inciso es un cálculo sencillo, mientras que el segundo inciso es consecuencia directa de la definición; la demostración de ambos incisos se omite. Para el tercer inciso, si el lado izquierdo de la desigualdad es cero, no hay nada que demostrar. Si dicho lado izquierdo es diferente de cero, podemos escribir

$$\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta},$$

(¡con cualquier rama del argumento!). Entonces $e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = r$ es real, de modo que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Usamos la definición anterior para introducir la integral de una función compleja a lo largo de una curva, que recuerda totalmente a la integral de línea, sólo que reemplazando el producto escalar por el producto de números complejos.

Definición 3.3. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva de clase C^1 en $[a, b]$. La *integral de f a lo largo de γ* se define como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Veamos otra forma común de escribir la integral anterior. Si $f = u + iv$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y al hacer el producto de los números complejos, tenemos

$$f\gamma' = (u + iv)(x' + iy') = (ux' - vy') + i(vx' + uy'),$$

de manera que si escribimos¹ $dz = dx + i dy$, vemos que

$$f dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

y

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u dx - v dy) + i(v dx + u dy).$$

¹Por supuesto, como en los cursos de Cálculo, usamos estas expresiones como notaciones, pero puede dárseles un sentido más formal mediante diferenciales.

Observación 3.4. El lector cuidadoso habrá notado nuestro afán por evitar situaciones problemáticas en la definición de la integral: No estamos hablando de funciones continuas “salvo en un punto”, “salvo en un número finito de puntos” y cosas por el estilo. Como es usual en estos cursos, optamos por imponer condiciones de continuidad sobre todas las funciones que integraremos. Un punto sutil en nuestras definiciones es que debemos imponer condiciones de continuidad de $\gamma'(t)$ en los extremos de los intervalos $[a, b]$. Podemos enunciar esto de dos maneras: La primera, exigiendo que exista una extensión C^1 de $\gamma'(t)$ a un intervalo que contenga a $[a, b]$; la segunda, que exista la derivada lateral de γ en a y en b . No entraremos en detalle; basta decir que el lector puede optar por el camino que más le agrade.

Una tercera integral nos será de gran utilidad.

Definición 3.5. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva de clase C^1 en $[a, b]$. La *integral de f con respecto de la longitud de arco $|dz|$* se define como

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Observe que cuando f es la función constante e igual a 1, la integral anterior se reduce a una ya conocida por los cursos de Cálculo:

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \text{long}(\gamma),$$

donde $\text{long}(\gamma)$ denota, como es de suponer, la longitud de la curva γ .

Ahora enunciaremos las propiedades básicas de la integral.

Proposición 3.6. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 en $[a, b]$.

1. Sean $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ otra función continua en U y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

2. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ una partición de $[a, b]$; si denotamos por γ_i la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, escribiremos $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. En este caso,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

3. Se tiene

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

En particular, si $|f(z)| \leq M$, donde M es una constante, entonces

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma).$$

4. La integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ no depende de la parametrización de γ ; más precisamente, supongamos que $t = t(s)$, donde $t: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ es una función C^1 , biyectiva y con $t'(s) > 0$ para toda s . Entonces

$$\int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma \circ t)(s) (\gamma \circ t)'(s) ds$$

5. Denotemos por $-\gamma$ la curva que tiene la misma imagen que γ , pero recorrida en sentido contrario. Entonces

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

6. Si existe una función analítica $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(t)) \Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es una curva cerrada, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son consecuencia de las propiedades de la integral $\int_a^b f(t) dt$ de una función compleja. Demostraremos la tercera:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

La cuarta afirmación es, en realidad, un caso particular del teorema de cambio de variable.

Para la quinta afirmación, podemos parametrizar $-\gamma: [-b, -a] \rightarrow U$, donde $-\gamma(t) = \gamma(-t)$. Entonces

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t)) \gamma'(-t) dt = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz;$$

en la penúltima igualdad hemos usado el teorema de cambio de variable para la función $s(t) = -t$, e intercambiado los límites de la integral.

En cuanto a la última afirmación, usamos el teorema fundamental del cálculo² y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

²En realidad, aplicamos el teorema a las partes real e imaginaria de $(F \circ \gamma)'(t)$.

Observación 3.7. La proposición anterior muestra que $\int_{\gamma} f(z) dz$ depende de la *orientación* de la curva γ . Recordemos que si una curva γ es la frontera de una región acotada U , entonces la orientación *positiva* de la curva es, intuitivamente, tal que si recorremos la curva con esa orientación, la región U nos queda a la izquierda de la curva.

La definición y propiedades básicas de la integral se extienden sin mayor problema a *curvas C^1 por partes*. Recordemos que una curva continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es C^1 por partes si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$ de modo que la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$ es de clase C^1 .

Ejemplo 3.8. Sea $f(z) = z^2$ y γ la curva que empieza en π , recorre la circunferencia de radio π (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) hasta $-\pi$ y de ahí por el eje real hasta π . Podemos parametrizar γ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = \pi e^{it}, & t \in [0, \pi] \\ \gamma_2(t) = t - 2\pi, & t \in [\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$. Calculamos $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ usando el teorema fundamental del cálculo y $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ por medio de la definición. Como $F(z) = z^3/3$ cumple que $F'(z) = f(z)$,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = F(\gamma(t)) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\pi}^{3\pi} (\gamma(t))^2 \cdot 1 dt = \int_{\pi}^{3\pi} (t - 2\pi)^2 dt = \frac{(t - 2\pi)^3}{3} \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{2\pi^3}{3},$$

de modo que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ejemplo 3.9. Consideremos la integral de la función $f(z) = e^z/z$ a lo largo de la curva dada por la intersección del semiplano superior con la circunferencia unitaria. Puesto que en este caso $|f(z)| = |e^z/z| = |e^z| = e^x$, con $x \in [-1, 1]$, tenemos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq e \cdot \text{long}(\gamma) = \pi e.$$

Ahora revisaremos algunas propiedades de la integral compleja que recuerdan a aquellas similares para la integral de línea:

Proposición 3.10. Sean U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 por partes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe una función analítica $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$.

2. Si γ es una curva cerrada, entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

3. La integral de f sólo depende de los extremos de la curva; más precisamente, si $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow U$ son curvas tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, entonces $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Demostración. Demostraremos que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). Para la primera implicación, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0. \end{aligned}$$

Para la segunda implicación, sea γ la curva $\gamma_1 - \gamma_2$, es decir, aquella que primero recorre γ_1 y luego γ_2 , ésta en sentido contrario al original. Entonces γ es cerrada y por tanto

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Para la tercera y última implicación, usaremos el hecho de que U es abierto y conexo. Sea $z_0 \in U$ fijo y definamos

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

donde por abuso de notación, la integral de la derecha denota la integral a lo largo de cualquier curva en U que una z_0 con z , pues por hipótesis la integral no depende de la curva. Para mostrar que F es analítica, demostraremos que si $F = u + iv$, entonces u, v son de clase C^1 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sea $z \in U$ y $r > 0$ suficientemente pequeño, de modo que el disco con centro en z y radio r esté contenido en U . En particular, los puntos $z+h$ y $z+ih$ están en U para todo $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < r$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{z_0}^{z+h} f(z) dz - \int_{z_0}^z f(z) dz \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+t) dt, \end{aligned}$$

donde la integral de z a $z+h$ se toma a lo largo de un segmento horizontal $\gamma(t) = z+t$, $t \in [0, h]$.

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a las partes real e imaginaria de f , de modo que

$$\frac{1}{h} \int_0^h \operatorname{Re} f(z+t) dt = \operatorname{Re} f(z+h') \quad \text{y} \quad \frac{1}{h} \int_0^h \operatorname{Im} f(z+t) dt = \operatorname{Im} f(z+h'')$$

con $|h'|, |h''| \leq |h|$. Cuando $h \rightarrow 0$, $h', h'' \rightarrow 0$ y como f es continua, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z),$$

lo que implica que $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ son continuas.

De manera análoga, tomando un segmento vertical $\gamma(t) = z + it$, $t \in [0, h]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + ih) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+ih} f(z) dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z + it) i dt = i f(z). \end{aligned}$$

Esto dice que $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ son continuas; junto con el análisis anterior, esto dice que u, v son de clase C^1 . Además, se satisface

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x},$$

que es la forma compleja de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo cual implica que F es analítica. Finalmente, como F es analítica, $F'(z) = \partial F/\partial x = f(z)$. \square

3.2. Lema de Goursat

El teorema de Cauchy establece condiciones para que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en el dominio de f . Las condiciones pueden establecerse sobre la curva o sobre la región U . Primero veremos una versión “sencilla” del teorema, con hipótesis fuertes que poco a poco iremos debilitando.

Teorema 3.11. Sean $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y R un rectángulo cerrado contenido en U . Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Recordemos que el teorema de Green nos dice

$$\int_{\partial R} (P dx + Q dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde P, Q son de clase C^1 . Entonces, si $f = u + iv$ y $dz = dx + idy$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f(z) dz &= \int_{\partial R} (u dx - v dy) + i \int_{\partial R} (v dx + u dy) \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por las condiciones de Cauchy-Riemann. \square

Este resultado es bueno, pero se puede demostrar una versión mejorada del teorema de Cauchy, para la cual sólo requerimos que f sea analítica. De hecho, con base en esta versión mejorada podremos demostrar que f es de clase C^∞ . Para ir en esta dirección, primero mostraremos un caso muy particular, pero importante, del teorema de Cauchy.

Lema 3.12 (Goursat). *Sean $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y R un rectángulo cerrado contenido en U . Entonces*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Subdividimos cada lado de R a la mitad para descomponer a R en cuatro rectángulos $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ de igual tamaño. Si orientamos cada una de las fronteras de estos rectángulos positivamente, es claro que la integral de f a lo largo de ∂R es la suma de las integrales de f a lo largo de las fronteras de estos rectángulos; además, por la desigualdad del triángulo,

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R^{(i)}} f(z) dz \right|. \quad (3.1)$$

Afirmamos que para alguno de estos rectángulos pequeños se cumple

$$\frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\partial R^{(i)}} f(z) dz \right|, \quad \text{o} \quad \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{(i)}} f(z) dz \right|,$$

pues de lo contrario tendríamos una contradicción con la desigualdad (3.1). Llamamos a dicho rectángulo R_1 . Luego volvemos a dividir R_1 en cuatro rectángulos de igual tamaño y repetimos el argumento para obtener un rectángulo $R_2 \subset R_1$ tal que

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial R_2} f(z) dz \right|;$$

así, obtenemos una sucesión de rectángulos anidados

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots$$

tales que

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right|.$$

Como los rectángulos están anidados, existe z_0 tal que $z_0 \in R_n$ para todo n . Puesto que f es analítica en R , para z_0 existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0);$$

y por definición, esto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|.$$

Observemos que

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz,$$

pues la función $-f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ admite una primitiva F (¿cuál?) y por tanto su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. Entonces,

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial R_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| < \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z_0| |dz|.$$

Si denotamos por d, d_n, p, p_n las magnitudes de las diagonales y los perímetros de R, R_n , es fácil ver que $2^n d_n = d$ y $2^n p_n = p$, de modo que

$$\int_{\partial R_n} |z - z_0| |dz| \leq d_n p_n = \frac{1}{4^n} dp;$$

reuniendo toda la información, tenemos que

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| < \frac{4^n}{4^n} \epsilon dp = \epsilon dp;$$

como lo anterior vale para todo $\epsilon > 0$, obtenemos la conclusión del teorema. \square

El lema de Goursat se puede mejorar aún más. Podemos permitirnos el lujo de que f deje de ser analítica en algunos puntos del interior de nuestro rectángulo, con una condición adicional:

Lema 3.13 (Goursat 2.0). *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado contenido en U , $z_0 \in \text{Int } R$ y $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)) = 0. \quad (3.2)$$

Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Por (3.2), para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ tenemos que

$$|f(z)(z - z_0)| < \epsilon, \quad \text{o} \quad |f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|}.$$

Sea R_1 un cuadrado de lado L centrado en z_0 tal que $|z - z_0| < \delta$ para todo $z \in R_1$. Prolongando los lados de R_1 podemos subdividir a R en nueve rectángulos. Observemos que en cualquiera de estos rectángulos pequeños (distinto de R_1) f es analítica, de modo que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_1} f(z) dz.$$

Tenemos entonces que

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial R_1} |f(z)| |dz| < \int_{\partial R_1} \frac{\epsilon}{|z - z_0|} |dz|,$$

pero para todo $z \in \partial R_1$, $|z - z_0| \geq L/2$, de modo que

$$\int_{\partial R_1} \frac{\epsilon}{|z - z_0|} |dz| < \epsilon \frac{2}{L} \int_{\partial R_1} |dz| = \epsilon \frac{2}{L} 4L = 8\epsilon,$$

de donde se sigue el resultado. \square

Por inducción, tenemos

Corolario 3.14 (Goursat 2.1). Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado contenido en U , $z_1, \dots, z_n \in \text{Int } R$ y $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_i} (f(z)(z - z_i)) = 0$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Aunque más adelante regresaremos a demostrar un resultado más fuerte, la *fórmula integral de Cauchy*, aprovechamos para ver un caso particular:

Ejemplo 3.15. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado contenido en U , $z_0 \in \text{Int } R$ y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Definamos $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Observemos que g es analítica en $U \setminus \{z_0\}$, pues es el cociente de dos funciones analíticas, y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) = 0.$$

Entonces, por el lema de Goursat 2.0,

$$0 = \int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \int_{\partial R} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Como ejercicio, se puede ver que la última integral es igual a $2\pi i$, de modo que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

3.3. El Teorema de Cauchy y sus consecuencias

Ahora que contamos con el lema de Goursat (en dos o tres versiones), podemos demostrar también algunas versiones de un importante resultado:

Teorema 3.16 (Cauchy 1.0). *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D .

Demostración. Por lo ya visto antes, basta mostrar que existe $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$. Definimos $F(z)$ como la integral de f a lo largo de una curva γ_1 dada por la unión de un segmento vertical y un segmento horizontal, que unen el centro de D con z . Con base en esta definición podemos calcular la derivada parcial de F con respecto de z :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h};$$

para calcular $F(z)$ consideramos la curva γ_1 ya mencionada, mientras que para calcular $F(z+h)$ usamos la unión de γ_1 con un segmento horizontal de z a $z+h$. La resta $F(z+h) - F(z)$ representa entonces la integral de f a lo largo del segmento horizontal que podemos parametrizar por $\gamma_1(t) = z+t$, $t \in [0, h]$; denotamos esta integral por $\int_z^{z+h} f(z) dz$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+t) dt = f(z); \end{aligned}$$

en el último paso hemos aplicado el teorema del valor medio a las partes real e imaginaria de f .

Observemos que debido al lema de Goursat podríamos haber definido F considerando una curva γ_2 formada por un segmento horizontal y uno vertical. Con un razonamiento análogo al anterior, usando ahora la curva $\gamma_2(t) = z+it$, $t \in [0, h]$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+ih} f(z) dz \\ &= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+it) dt = if(z), \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z),$$

que son las condiciones de Cauchy-Riemann. Así, F es de clase C^1 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que resulta ser analítica. Finalmente,

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z),$$

lo que concluye la demostración. \square

Podemos extender el teorema de Cauchy usando las versiones 2.0 y 2.1 del lema de Goursat:

Teorema 3.17 (Cauchy 2.0). Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $z_0 \in D$ y $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en $D \setminus \{z_0\}$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D que no pase por z_0 .

Demostración. Seguimos un procedimiento completamente similar al anterior: Basta encontrar F analítica tal que $F'(z) = f(z)$. De hecho, definiremos F como la integral de f a lo largo de una curva γ dada por una unión finita de segmentos horizontales y verticales que unen el centro de D (o para el mismo efecto, cualquier punto fijo de D) con z , sin pasar por z_0 . Por el lema de Goursat 2.0, cualquier curva de este tipo (que no pase por z_0 , por supuesto) nos sirve. \square

Teorema 3.18 (Cauchy 2.1). Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $z_1, \dots, z_n \in D$ y $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_i} f(z)(z - z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D que no pase por los puntos z_1, \dots, z_n .

Una aplicación importante del teorema de Cauchy (más precisamente, de la versión 2.0) es la siguiente:

Proposición 3.19. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in D$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes que no pase por z_0 . Entonces

$$f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. Consideremos la función $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Entonces g satisface las condiciones del teorema de Cauchy 2.0: Es analítica en $D \setminus \{z_0\}$ y, puesto que g es continua en z_0 , tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) = 0$. Por lo tanto, $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$, lo que da por resultado nuestra afirmación. \square

Ya hemos calculado algunas integrales del tipo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0},$$

pero veamos un ejemplo motivador más. Sea γ la circunferencia de radio r con centro en z_0 , recorrida k veces ($k \in \mathbb{N}$) en sentido positivo; más precisamente, sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi k]$. Un sencillo cálculo nos dice que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi k} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi ki.$$

Definición 3.20. Sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \notin \gamma$. Entonces el número de vueltas de γ con respecto de z_0 (también llamado el índice de γ con respecto de z_0) está definido como

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \quad (3.3)$$

Teorema 3.21. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y z_0 un punto tal que $z_0 \notin \gamma$; entonces $n(\gamma, z_0)$ es un número entero.

Demostración. Sea

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

entonces, en los puntos donde el integrando es continuo, el teorema fundamental del cálculo nos da

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

así,

$$\frac{d}{dt} e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) = 0$$

en los puntos donde $g'(t)$ existe, y por tanto $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ es constante por partes en $[a, b]$. Como la función es continua, entonces es globalmente constante en $[a, b]$, por lo que

$$e^{-g(a)} (\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)} (\gamma(b) - z_0);$$

como γ es cerrada, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Esto implica que $e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$. Además sabemos que $g(a) = 0$, de modo que $e^{-g(b)} = 1$ por lo que b tiene que ser un múltiplo entero de $2\pi i$, es decir

$$g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = 2\pi k i$$

para alguna $k \in \mathbb{Z}$, de donde

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Después veremos algunas propiedades de $n(\gamma, z_0)$. Por lo pronto, usaremos esta notación para escribir la proposición 3.19 de otra forma.

Proposición 3.22 (Fórmula integral de Cauchy). *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in D$ y γ una curva cerrada, C^1 por partes, contenida en D , que no pasa por z_0 . Entonces*

$$n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.4)$$

La aplicación más usual de la fórmula de Cauchy ocurre cuando $n(\gamma, z_0) = 1$. Bajo esta hipótesis, tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ejemplo 3.23. Sea γ una circunferencia con centro en z_0 y recorrida una sola vez, en sentido positivo; en forma explícita, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces (3.4) toma la forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

lo cual nos dice que $f(z_0)$ es una especie de *promedio* de los valores de f en una circunferencia con centro en z_0 y radio *arbitrario* (siempre que la circunferencia y su interior queden dentro del dominio de f).

3.4. Las funciones analíticas vistas más de cerca

La fórmula integral de Cauchy (3.4) nos permite obtener otras propiedades importantes de las funciones analíticas.

Proposición 3.24. *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in D$ y γ una curva cerrada, C^1 por partes, contenida en D , que no pasa por z_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f^{(n)}(z_0)$ y está dada por la fórmula integral*

$$n(\gamma, z_0)f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.5)$$

La demostración de esta proposición es consecuencia del siguiente

Lema 3.25. Sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada, C^1 por partes y φ una función continua en los puntos de γ . La función

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw, \quad z \notin \gamma,$$

posee derivadas analíticas de todos los órdenes y $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n . Si $n = 1$, tenemos que

$$F_1(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw.$$

Veamos primero que F_1 es continua. Para $z, z_0 \notin \gamma$ tenemos que

$$\begin{aligned} F_1(z) - F_1(z_0) &= \int_{\gamma} \varphi(w) \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right) dw \\ &= (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-z_0)} dw. \end{aligned}$$

Como z_0 no está en el compacto $\gamma[a, b]$, existe $d = \min_{t \in [a, b]} |\gamma(t) - z_0| > 0$. Además, si $|z - z_0| < d/2$, tenemos que $|\gamma(t) - z| \geq d/2$ para todo $t \in [a, b]$. Como φ es continua en γ , existe M tal que $|\varphi| \leq M$. Juntando esta información, tenemos

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq |z - z_0| \frac{2M}{d^2} \text{long}(\gamma),$$

lo que implica que F_1 es continua en z_0 . Observemos que además tenemos

$$\frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-z_0)} dw = \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw, \quad \Phi(w) = \frac{\varphi(w)}{w-z_0};$$

como Φ es continua en los puntos de γ , esta expresión es continua en z_0 , de modo que

$$F'_1(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{w-z_0} dw = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^2} dw = F_2(z_0).$$

Supongamos que hemos mostrado que $F'_{n-1}(z)$ existe y que

$$F'_{n-1}(z) = (n-1)F_n(z).$$

Primero veamos que $F_n(z)$ es continua. Tenemos que

$$\begin{aligned} F_n(z) - F_n(z_0) &= \int_{\gamma} \left(\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} - \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n} \right) dw \\ &= \int_{\gamma} \left(\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} - \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)} + \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)} - \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n} \right) dw \\ &= (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n(w-z_0)} dw + (G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)), \end{aligned}$$

donde

$$G_{n-1}(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)} dw = \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{(w-z)^{n-1}} dw,$$

y $\Phi(w) = \varphi(w)/(w-z_0)$, como antes. De nuevo, podemos acotar

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n(w-z_0)} dw \right| \leq \frac{2^n M}{d^{n+1}} \text{long}(\gamma),$$

y usar la hipótesis de inducción para G_{n-1} , obteniendo que F_n es continua en z_0 . Además,

$$\begin{aligned} F'_n(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{(w-z)^n} dw + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)}{z - z_0} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\Phi(w)}{(w-z_0)^n} dw + G'_{n-1}(z_0) \\ &= F_{n+1}(z_0) + (n-1)G_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Demostración de la proposición 3.24. En el lema 3.25, hagamos $\varphi(z) = f(z)$, así para cualquier z_0 que no esté en γ , si

$$F_n(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz,$$

tenemos que F_n es analítica en z_0 y $F'_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$. Pero para $n = 1$, por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$F_1(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i n(\gamma, z_0) f(z_0).$$

Por otro lado,

$$F_{n+1}(z_0) = \frac{F'_n(z_0)}{n} = \frac{F''_{n-1}(z_0)}{n(n-1)} = \dots = \frac{F_1^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{2\pi i}{n!} n(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0),$$

de modo que

$$n(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} F_{n+1}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad \square$$

Ejemplo 3.26. Podemos usar la fórmula (3.5) para evaluar integrales, como las siguientes:

$$\int_{|z|=3} \frac{\text{sen } \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz \quad \text{y} \quad \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

Para la primera integral, hagamos $f(z) = \operatorname{sen} \pi z^2 + \operatorname{cos} \pi z^2$ y observemos que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1};$$

entonces podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \operatorname{cos} \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz &= \int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z-2} dz - \int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z-1} dz \\ &= 2\pi i (f(2) - f(1)) = 4\pi i. \end{aligned}$$

Para la segunda integral, hagamos $g(z) = e^{2z}$. Por la fórmula (3.5) tenemos

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \int_{|z|=3} \frac{g(z)}{(z-(-1))^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} g^{(3)}(-1) = \frac{8\pi i}{3e^2}.$$

Ejemplo 3.27. Como un ejemplo un poco más elaborado, demostraremos que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} 2\pi.$$

Sea $z = e^{i\theta}$; entonces $dz = iz d\theta$, lo que implica que $d\theta = dz/(iz)$, mientras que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Así, por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta &= \int_{|z|=1} \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^{2n} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \int_{|z|=1} \left(z^{2n-1} + \binom{2n}{1} z^{2n-3} + \cdots + \binom{2n}{n} z^{-1} + \cdots + z^{-2n-1} \right) dz \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \binom{2n}{n} \int_{|z|=1} z^{-1} dz = \frac{1}{2^{2n} i} \binom{2n}{n} 2\pi i \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} 2\pi = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} 2\pi. \end{aligned}$$

Con la proposición 3.24 a la mano, podemos obtener dos resultados importantes. El primero es un recíproco del teorema de Cauchy:

Teorema 3.28 (Morera). *Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada C^1 por partes contenida en D . Entonces f es analítica en D .

Demostración. Sabemos que si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada γ , entonces existe $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$. Pero por la proposición 3.24, F tiene derivadas analíticas de todos los órdenes, así que en particular $F''(z) = f'(z)$ existe para todo $z \in D$. \square

Teorema 3.29 (Liouville). *Sea f una función entera y acotada. Entonces f es constante.*

Demostración. Usaremos la fórmula integral de Cauchy (3.5) para mostrar que $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. En este caso, γ es una circunferencia de radio R suficientemente grande. Entonces $n(\gamma, z_0) = 1$ y

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} |dz|;$$

como $|f(z)| \leq M$ y la longitud de γ es $2\pi R$,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{MR}{R^2} = \frac{M}{R},$$

lo que tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ (aquí es donde usamos que f está definida en todo \mathbb{C}), de modo que $f'(z_0) = 0$. \square

Como consecuencia del teorema de Liouville, tenemos el

Teorema 3.30 (fundamental del álgebra). *Todo polinomio de grado mayor o igual a 1, con coeficientes en \mathbb{C} , tiene al menos una raíz en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $P(z)$ un polinomio como en el enunciado del teorema, y supongamos que P no tiene raíces, es decir, que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función $f(z) = 1/P(z)$ es analítica en \mathbb{C} . Veremos que f también es acotada. Puesto que el grado de $P(z)$ es mayor o igual a 1, tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, de modo que si fijamos $\epsilon > 0$, por definición de límite tenemos que existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < \epsilon$ para todo $|z| > R$. Por otro lado, como el disco cerrado $|z| \leq R$ es compacto, $|f(z)|$ alcanza su máximo M ahí, de modo que si elegimos $M' = \max\{\epsilon, M\}$, tenemos que $|f(z)| \leq M'$ para todo $z \in \mathbb{C}$; por tanto, f es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, f es constante, por tanto también P es constante, lo cual contradice el hecho de que el grado de P es mayor o igual a 1. \square

Para cerrar esta sección, veamos una consecuencia más de la fórmula integral de Cauchy. Recordemos la condición $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0$ que pedimos en el lema de Goursat 2.0. En aquel entonces vimos que esta condición se satisface, por ejemplo, si f es continua en z_0 . Pero podemos decir más, pues si miramos fijamente la expresión (3.5) podemos notar que el punto z_0 no tiene nada especial: La función definida por (3.5) es analítica *para cualquier* z_0 , con tal de que no caiga en la curva γ . Así, podemos usar la fórmula para *definir* $f(z_0)$, en caso de que no existiera, para obtener una función analítica inclusive en z_0 .

Definición 3.31. Sean U un conjunto abierto en \mathbb{C} , $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Decimos que z_0 es una *singularidad removible* de f si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

A continuación justificamos esta notación.

Proposición 3.32. Sean U un conjunto abierto en \mathbb{C} , $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. z_0 es una singularidad removible de f si y sólo si existe una función analítica $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$.

Demostración. Si existe una función analítica $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$, entonces en particular \tilde{f} es continua en z_0 y por tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{f}(z)(z - z_0) = 0.$$

Por otro lado, si se cumple la condición sobre el límite, podemos definir $\tilde{f}(z)$ como

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz;$$

Por el lema 3.25, sabemos que \tilde{f} es analítica y que de hecho es igual a $f(z)$ en todo punto donde ésta última esté definida, debido a la fórmula integral de Cauchy. \square

3.5. Principio del módulo máximo

Como otra aplicación notable de la fórmula integral de Cauchy, veremos el *principio del módulo máximo*, resultado que tiene repercusiones muy importantes, por ejemplo, en ecuaciones diferenciales parciales y en geometría diferencial. Hay varias formulaciones de este teorema, por ejemplo

Teorema 3.33. Sean U una región de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Si el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en un punto $z_0 \in U$, entonces f es constante.

Demostración. Primero mostraremos que f es constante en un disco (abierto) con centro en z_0 . Sea D un disco de este tipo, tal que $D \subset U$. Si $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, es una circunferencia contenida en D y que le da una sola vuelta a z_0 , por (3.5) tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

lo que implica

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,$$

pero entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|) dt = 0.$$

Como el integrando es continuo y mayor o igual a 0, tenemos que $|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})|$. Puesto que esto vale *para cualquier* $r > 0$, siempre que la circunferencia esté contenida en D , tenemos que $|f(z)|$ es constante en D . Recordemos que esto y el hecho de que f es analítica implican que f es constante en D . Procediendo de manera análoga con *cualquier* punto z tal que $f(z) = f(z_0)$, tenemos que el conjunto

$$\{z \in U \mid f(z) = f(z_0)\}$$

es abierto en U . Pero también este conjunto es cerrado en U , pues es justamente la imagen de un conjunto cerrado bajo una función continua; explícitamente, este conjunto es $f^{-1}(f(z_0))$. Como además es no vacío (pues z_0 está en él), la conexidad de U implica que es igual a todo U , lo que implica que f es constante en U . \square

Corolario 3.34. Sean U una región acotada de \mathbb{C} , $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que es analítica en U y continua en la frontera ∂U de U . Entonces el módulo $|f(z)|$ de f alcanza su máximo en algún punto de ∂U .

Demostración. Como f es continua en el compacto \bar{U} , $|f(z)|$ alcanza su máximo en algún punto de \bar{U} . Si lo alcanza en un punto de ∂U no hay nada que demostrar. Supongamos que $|f(z)|$ alcanza su máximo en un punto $z_0 \in U$. Por el resultado anterior, f es constante en U . Por continuidad, f es constante en \bar{U} , de modo que $|f(z)|$ alcanza su máximo en algún punto (de hecho, en todos los puntos) de ∂U . \square

El principio del módulo máximo se puede ver como un teorema que caracteriza a ciertas funciones analíticas, a saber, a las funciones constantes. De hecho, es mucho más poderoso de lo que aparenta. El siguiente resultado nos muestra que podemos usarlo para caracterizar a otras funciones.

Lema 3.35 (de Schwarz). Sean $D = D(0, 1)$ el disco unitario y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con $|f(z)| \leq 1$ y $f(0) = 0$. Entonces

1. $|f(z)| \leq |z|$ para todo z .
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Si además tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D \setminus \{0\}$ o bien $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = cz$ para algún $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$.

Demostración. Sea $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Aplicamos el principio del módulo máximo a g , con $U = D(0, r)$, el disco abierto con centro en 0 y radio $r < 1$: Si $|z| = r$ entonces $|g(z)| = |f(z)|/|z| \leq 1/r$. Por el principio del módulo máximo, $|g(z)| \leq 1/r$ para todo $|z| \leq r$. Ahora, si hacemos $r \rightarrow 1$, entonces $|g(z)| \leq 1$, lo que nos dice que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $|z| \leq 1$ y $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$.

Ahora, si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D \setminus \{0\}$, entonces $|g(z_0)| = 1$, es decir, el máximo del módulo de g se alcanza en un punto interior de D , por lo que $g(z) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$. Análogamente, si $|f'(0)| = 1$, entonces $|g(0)| = 1$ y el máximo del módulo de g se alcanza en $z = 0$, de donde g nuevamente es constante. \square

3.6. El Teorema de Cauchy, de nuevo

Antes de continuar con nuestro estudio de las funciones analíticas, aprovecharemos todo lo que hemos aprendido para extender el Teorema de Cauchy 3.16. En cierto sentido, podemos extenderlo en al menos dos direcciones: A regiones más generales o a cierto tipo de curvas que cumplan ciertas propiedades respecto de la región en cuestión.

En realidad, vamos a considerar dos maneras de extender este teorema. A una le llamaremos la *versión homotópica* y a la otra, la *versión homológica*. Esperamos que al final, ambas versiones sean igual de intuitivas.

Comencemos con la versión homotópica. Para esto, daremos una definición que tiene su importancia en muchas áreas de las matemáticas, aunque aquí nos restringiremos a nuestro contexto de la *variable compleja*. La idea es dar una especie de *deformación* entre dos curvas.

Definición 3.36. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ dos curvas (continuas) en una región U de \mathbb{C} . Una *homotopía* entre γ_0 y γ_1 en U es una transformación continua

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

con las siguientes propiedades:

1. $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ para todo $t \in [a, b]$;
2. $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [a, b]$;

Cuando existe tal homotopía, decimos que las curvas γ_0, γ_1 son *homotópicas*.

En este contexto, definimos $\gamma_s(t) := H(t, s)$, con $s \in [0, 1]$ fija. Podemos pensar a la familia de curvas $\{\gamma_s\}$ como una deformación continua de γ_0 en γ_1 .

Observación 3.37. En realidad, la definición anterior requiere de varios ajustes para que nos sea realmente útil. Puesto que en nuestro contexto estamos integrando usualmente funciones analíticas sobre curvas cerradas, C^1 por partes, tendremos los siguientes requisitos adicionales:

- Si las curvas γ_0 y γ_1 son cerradas, es decir,

$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b) \text{ y } \gamma_1(a) = \gamma_1(b),$$

pediremos que las curvas γ_s también lo sean.

- Pediremos que cada γ_s sea C^1 por partes. Una manera de formalizar esto es suponer que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$, de modo que cada γ_s sea C^1 en el intervalo (t_{i-1}, t_i) para cada $i = 1, \dots, n$. Observemos que cada γ_s es continua en $[a, b]$, pues de inicio pedimos que la homotopía H fuese continua.

Ejemplo 3.38. Consideremos la circunferencia unitaria $\gamma_0(t) = e^{it}$ y la *curva constante* $\gamma_1(t) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Afirmamos que ambas curvas son homotópicas (como curvas cerradas) en $U = \mathbb{C}$. En efecto, es fácil convencerse de que la transformación $H(t, s) = (1-s)e^{it}$, $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ es una homotopía entre ambas curvas, donde cada curva intermedia γ_s es cerrada.

En relación con el ejemplo anterior, en vez de decir γ_0 es homotópica a una curva constante en U , por lo general abreviaremos la expresión diciendo que la curva es *homotópica a un punto en U* . Esta propiedad es tan importante que la destacaremos en una definición.

Definición 3.39. Una región U de \mathbb{C} es *simplemente conexa* si y sólo si toda curva cerrada $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ es homotópica a un punto en U .

Observación 3.40. En un contexto más general que el aquí considerado, un conjunto simplemente conexo es aquel que es conexo y satisface la condición sobre las curvas cerradas. Por simplicidad, aquí sólo consideraremos regiones de \mathbb{C} , que por definición ya son conexas.

Ejemplo 3.41. Inspirados por el ejemplo 3.38, podemos mostrar que cualquier disco $D = D(z_0, r)$ es una región simplemente conexa de \mathbb{C} : Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ una curva cerrada. Entonces la transformación $H: [a, b] \rightarrow [0, 1] \rightarrow D$ dada por $H(t, s) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$ es una homotopía entre γ y z_0 , el centro del disco D .

Ejemplo 3.42. Intuitivamente, la circunferencia unitaria *no* es homotópica a un punto en $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: Cualquier homotopía entre esta circunferencia y una curva constante deberá pasar en algún momento por el origen.

Ahora podemos enunciar el resultado anunciado al principio de esta sección.

Teorema 3.43 (de Cauchy, versión homotópica). *Sean U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U y $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ dos curvas cerradas, C^1 por partes. Si γ_0, γ_1 son homotópicas en U , entonces*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Antes de dar la prueba, enunciaremos dos consecuencias de este resultado.

Corolario 3.44. Sean U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva cerrada, C^1 por partes. Si γ es homotópica a un punto en U , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

El siguiente resultado generaliza al teorema de Cauchy para el disco.

Corolario 3.45. Sean U una región simplemente conexa de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ cerrada, C^1 por partes.

Como dicen los clásicos, una demostración completa del teorema 3.43 se escapa al objetivo de estas notas, pero se puede consultar en [2]. Probaremos un resultado con hipótesis adicionales.

Demostración del teorema 3.43. Sea $H: [a, b] \times [0, 1]$ una homotopía entre γ_0 y γ_1 . Supondremos, para simplificar la demostración, que H es C^2 por partes, de modo que las parciales cruzadas de orden 2 sean iguales. Definimos $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$h(s) = \int_{\gamma_s} f(z) dz = \int_a^b f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) dt.$$

Queremos probar que h es constante en $[0, 1]$. Para esto, mostraremos que su derivada es idénticamente igual a cero:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_a^b f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t} dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\partial H}{\partial t} + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial s} + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \right) dt = \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \right) \Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

donde la conclusión se sigue del hecho de que todas las curvas $\gamma_s(t) = H(t, s)$ son cerradas. Por tanto, h es constante y se sigue la afirmación del teorema. \square

Ahora pasaremos a la que llamamos la versión homológica del teorema de Cauchy. Nuestra exposición se basa en el artículo [4]. Para motivar un poco esta versión, supongamos por el momento que nuestra región de interés U es

simplemente conexa, consideremos una curva γ cerrada C^1 por partes contenida en U y un punto $z \notin U$. Entonces es fácil convencerse de que el número de vueltas

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

que le da γ a z es igual a cero. De hecho, si nos fijamos en el conjunto

$$E = E_{\gamma} = \{z \in \mathbb{C} \mid n(\gamma, z) = 0\},$$

este conjunto es abierto (¿por qué?) y contiene una vecindad de ∞ ; es decir, $n(\gamma, z) = 0$ para todo z con $|z|$ suficientemente grande (para esto, el lector puede estimar la integral anterior).

Así, en esta versión del teorema de Cauchy, el número de vueltas será central.

Definición 3.46. Sea U una región de \mathbb{C} y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva cerrada, C^1 por partes. Decimos que γ es *homóloga a 0 con respecto de U* si el complemento de U está contenido en el conjunto E arriba definido; es decir, si para todo $z \notin U$, $n(\gamma, z) = 0$.

En general, abreviaremos la frase “homóloga a 0 con respecto de U ” diciendo simplemente “homóloga a 0”.

Antes de enunciar esta versión del teorema de Cauchy, conviene analizar este concepto. ¿Cuál es su relación con el concepto de homotopía? Más en específico, ¿hay alguna relación entre ser una “curva homotópica a una constante” y una “curva homóloga a 0”? Una primera relación es la siguiente.

Proposición 3.47. Sean U una región de \mathbb{C} y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva cerrada, C^1 por partes. Si γ es homotópica a una constante en U , entonces γ es homóloga a 0.

Demostración. La prueba es sencilla. Como γ es homotópica a una curva constante $\tilde{\gamma}$ en U ,

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dw}{w - z} = 0$$

para todo $z \notin U$. □

Ejemplo 3.48. Para ver que ser homóloga a 0 no implica que la curva sea homotópica a una constante, consideremos la curva que aparece en la figura 3.1, llamada *curva de Pochhammer*. El lector deberá convencerse de que la curva no es homotópica a una constante en $U = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, pero que $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) = 0$, de modo que γ es homóloga a 0.

Este ejemplo muestra que la clase de curvas homólogas a 0 es más grande que la clase de curvas homotópicas a una constante. Tiene sentido entonces extender el teorema de Cauchy a esta nueva clase.

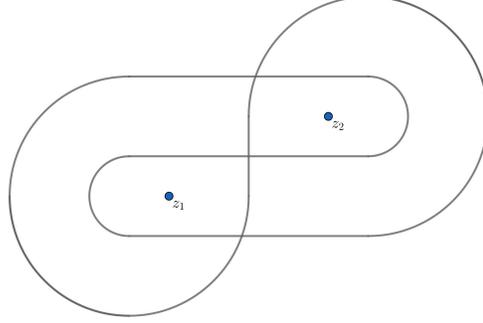


Figura 3.1: Curva de Pochhammer.

Teorema 3.49 (de Cauchy, versión homológica). Sean U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva cerrada, C^1 por partes. Si γ es homóloga a cero, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Además, se cumple la fórmula integral de Cauchy:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo $z \in U$ que no esté en la imagen de γ .

Demostración. Sea $g: U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Es claro que g es continua; además, la transformación $z \mapsto g(z, w)$ es analítica, pues tiene una singularidad removible cuando $z = w$. Ahora, definimos $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(z) = \begin{cases} \int_{\gamma} g(z, w) dw, & z \in U, \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, & z \in E. \end{cases}$$

Por hipótesis, $\mathbb{C} = U \cup E$, y además ambas expresiones coinciden en $U \cap E$. Ya sabemos que las dos expresiones que definen a h nos dan funciones analíticas, de modo que h es una función entera. Cuando $|z|$ es suficientemente grande,

tenemos que $z \in E$, de modo que para tales z , $h(z)$ está dada por la segunda expresión en su definición y

$$|h(z)| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \right|;$$

como f es continua en γ , existe M tal que $|f(w)| \leq M$. Además, si $z \rightarrow \infty$, $|w-z| \rightarrow \infty$, y por tanto $1/|w-z| < \epsilon$ para z suficientemente grande. Reuniendo esta información tenemos

$$|h(z)| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| < M \cdot \text{long}(\gamma) \cdot \epsilon,$$

lo que demuestra que $h(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Esto nos dice que h está acotada en una vecindad de ∞ y por tanto está acotada en \mathbb{C} .

El teorema de Liouville nos garantiza entonces que h es constante y, de hecho, $h = 0$. Por tanto, si $z \in U$, usamos la primera expresión en la definición de h y obtenemos la fórmula integral de Cauchy.

Para la demostración de que la integral de f se anula, fijamos un punto $u \in U$ que no esté en la imagen de γ y usamos la fórmula integral de Cauchy para la función (analítica) $z \mapsto f(z)(z-u)$, de modo que

$$n(\gamma, z)f(z)(z-u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(w-u)}{w-z} dw;$$

evaluando esta expresión en $z = u$ obtenemos el resultado. \square

En consecuencia, obtenemos

Corolario 3.50. Sean U una región simplemente conexa de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces existe $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F' = f$.

Demostración. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva cerrada, C^1 por partes. Como U es simplemente conexa, γ es homotópica a una constante en U . Por la Proposición 3.47, γ es homóloga a 0. Por el Teorema 3.49, $\int_{\gamma} f = 0$. Como esto ocurre para toda γ , la Proposición 3.10 garantiza la existencia de la función $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F' = f$. \square

3.7. Funciones armónicas, de nuevo

Dada la estrecha relación entre las funciones analíticas de variable compleja y las funciones armónicas, no debe sorprender que podamos traducir algún comportamiento de unas en un comportamiento de las otras. En particular, veremos que se satisface un *principio del máximo para funciones armónicas*. Antes de dar el resultado preciso, demos una discusión intuitiva.

Sean U una región de \mathbb{C} y $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en U que alcanza un máximo en un punto $z_0 \in U$. Queremos ver que u debe ser constante. Ya

sabemos que la parte real de una función analítica es armónica, así que supongamos por un momento que vale la afirmación recíproca, es decir, que para u existe una función $v: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es analítica. Observemos que

$$e^{f(z)} = e^{u(z)}(\cos v(z) + i \operatorname{sen} v(z)),$$

lo que implica que

$$\left| e^{f(z)} \right| = e^{u(z)}.$$

Como u alcanza un máximo en un punto $z_0 \in U$ y la función e^x es creciente, $e^{u(z)}$ alcanza su máximo en $z_0 \in U$. Por el principio del módulo máximo, $e^{f(z)}$ es constante; de aquí es fácil concluir que u también resulta ser constante.

Debemos entonces responder la pregunta: ¿Cuándo ocurre que una función armónica u es la parte real de una función analítica? Para ver que esto no siempre ocurre, veamos el siguiente ejemplo.

Sea $u: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(z) = u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln |z|.$$

Veamos que u es armónica. Calculemos sus primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

y las segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(El lector puede calcular también la derivada $\partial^2 u / \partial x \partial y$.) De aquí tenemos que u es de clase C^2 (al menos) y que $\Delta u = 0$, es decir, u es armónica.

¿Existe f analítica tal que $u = \operatorname{Re} f$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? La idea detrás de este ejemplo es que u debería ser la parte real de $\log z$, pero esta función no está definida en todo el dominio de u . En general, supongamos que existe una función v tal que $f = u + iv$ sea analítica; por las condiciones de Cauchy-Riemann tendríamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

de modo que $v = \arctan(y/x) + c$ con c constante, pero esta función no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En resumen, u es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no puede ser la parte real de una función analítica en este conjunto.

Ahora daremos una respuesta a la pregunta planteada.

Proposición 3.51. *Sean U una región simplemente conexa de \mathbb{C} y $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en U . Entonces u es de clase C^∞ y existe una función analítica $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $u = \operatorname{Re} f$.*

Demostración. Primero probemos la segunda parte de la proposición. Sea

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = U + iV;$$

como u es armónica, en particular es de clase C^2 , lo que implica que g es de clase C^1 . Además, g cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial V}{\partial y}; \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}$$

Esto implica que g es analítica en U ; como U es simplemente conexa, por el Corolario 3.50 existe F analítica tal que $F' = g$ en U . Si $F = \tilde{u} + i\tilde{v}$, entonces

$$F' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

es decir, $\tilde{u} - u = c$ para alguna $c \in \mathbb{R}$. Si $f = F - c$, tenemos que f es analítica y $u = \operatorname{Re} f$.

Probemos ahora la primera parte de la proposición. Por lo que acabamos de demostrar, $u = \operatorname{Re} f$ para alguna f analítica en U . Como f es C^∞ , entonces u también lo es. \square

Teorema 3.52 (Principio del máximo para funciones armónicas). *Sea u una función armónica en una región U de \mathbb{C} . Si u tiene un máximo local en $z_0 \in U$, entonces u es constante.*

Completaremos el argumento que bosquejamos al principio de esta sección.

Demostración. Consideremos un disco abierto D alrededor del punto z_0 . Como D es simplemente conexo, por la Proposición 3.51, existe f analítica en D tal que $u = \operatorname{Re} f$. Entonces la función $e^{f(z)}$ también es analítica y $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$. Como u alcanza un máximo en z_0 y la función exponencial real es creciente, $|e^{f(z)}|$ también alcanza un máximo en z_0 . Por el Teorema 3.33, $|e^{f(z)}|$ es constante en D y por lo tanto $e^{u(z)}$ también lo es, por lo que u es constante en D . Podemos aplicar este argumento a cualquier punto del conjunto

$$A = \{ z \in U \mid u(z) = u(z_0) \}$$

lo que implica que A es abierto en U . Pero claramente A también es cerrado y no vacío. Como U es conexo, $A = U$ y u es constante. \square

Teorema 3.53 (Principio del máximo/mínimo para funciones armónicas). *Sean U una región acotada de \mathbb{C} y $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, continua en \bar{U} y armónica en U . Sean m, M el mínimo y el máximo de u en ∂U , respectivamente. Entonces*

1. $m \leq u(z) \leq M$ para todo $z \in U$.

2. Si $u(z_0) = m$ o $u(z_0) = M$ en algún $z_0 \in U$, entonces u es constante.

Demostración. Sea \bar{M} el máximo de u en \bar{U} y supongamos que $\bar{M} > M$. Esto dice que u alcanza su máximo global en un punto interior $z_0 \in U$. Por el resultado anterior, $u \equiv \bar{M}$ en \bar{U} , lo que es una contradicción. Por tanto, $\bar{M} = M$. Si $u(z_0) = M$ en algún $z_0 \in U$, nuevamente aplicamos el resultado anterior para concluir que u es constante.

Al considerar la función $-u$ obtenemos las conclusiones para m . \square

Ahora tenemos el principio del módulo máximo para funciones analíticas, mientras que tenemos dos principios (del máximo y el mínimo) para funciones armónicas. Uno podría preguntarse si existe un principio del módulo mínimo para funciones analíticas; es decir, si el módulo de una función analítica debe alcanzar su mínimo en la frontera del dominio de definición. Sin embargo, es muy fácil convencerse de que esto es falso: Por ejemplo, sea $f: \bar{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$. Entonces $f(0) = 0$, de modo que el módulo de f alcanza su mínimo en un punto interior del dominio y f no es constante. Sin embargo, eliminando la posibilidad de que $f(z) = 0$ obtenemos el anhelado principio:

Teorema 3.54 (Principio del módulo mínimo para funciones analíticas). *Sea U una región acotada de \mathbb{C} , $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ una función, continua en \bar{U} , analítica en U y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{U}$. Entonces $|f(z)|$ alcanza su mínimo en la frontera de U .*

Demostración. Sea $g(z) = 1/f(z)$. Es claro que g está bien definida y es analítica, de modo que por el principio del módulo máximo, $|g(z)|$ alcanza su máximo en ∂U . Pero entonces tenemos que $|f(z)| = 1/|g(z)|$ alcanza su mínimo en ∂U . \square

Regresemos a las funciones armónicas. Si f es analítica en un abierto U , $z_0 \in U$ y γ es una circunferencia de radio r con centro en z_0 , de modo que $D(z_0, r) \subset U$, aplicando la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Podemos obtener una fórmula análoga para funciones armónicas, como sigue. Como arriba, sea $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ armónica en U , $z_0 \in U$ y $\bar{D}(z_0, r) \subset U$. Como D es simplemente conexo, $u = \operatorname{Re} f$ para una función $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

En otras palabras, el valor de u en un punto z_0 es el promedio de los valores de la función a lo largo de una circunferencia con centro en z_0 .

Podemos utilizar los principios del máximo y mínimo para funciones armónicas para obtener resultados acerca de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Supongamos que $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \bar{U} y armónica en U , donde U es una región acotada de \mathbb{C} . Supongamos además que $u = 0$ en la frontera de U ; entonces

- Por el principio del máximo, $u \leq 0$ en \bar{U} .
- Por el principio del mínimo, $u \geq 0$ en \bar{U} .

Por lo tanto, $u = 0$ en \bar{U} . De aquí se desprende el siguiente

Corolario 3.55. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, $u_1, u_2 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en \bar{U} y armónicas en U . Si $u_1(z) = u_2(z)$ para todo $z \in \partial U$, entonces $u_1(z) = u_2(z)$ para todo $z \in U$.

Parafraseando este resultado, vemos que si existe una solución $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ al problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(z) = u_0(z), \quad \text{para todo } z \in \partial U, \end{cases}$$

donde $u_0 : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada, entonces dicha solución es única.

3.8. Ejercicios

En lo sucesivo, U denota una región de \mathbb{C} , mientras que las curvas consideradas se recorren una sola vez, en el sentido positivo; es decir, contrario al de las manecillas del reloj.

1. Evalúa las integrales

$$\int x dz, \quad \int y dz, \quad \int \bar{z} dz,$$

a lo largo de las siguientes curvas:

- a) El segmento de recta de 0 a $1 - i$.
 - b) La circunferencia $|z| = 1$.
 - c) La circunferencia $|z - a| = 1$, $a \in \mathbb{C}$
2. Sea γ una curva simple cerrada, C^1 por partes que acota un conjunto con área A . Demuestra que

$$\int_{\gamma} x dz = iA, \quad \int_{\gamma} y dz = -A, \quad \int_{\gamma} \bar{z} dz = 2iA.$$

Sugerencia: Teorema de Green.

3. Calcula la integral $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$ usando:
 - a) el segmento de recta que une 0 con $1 + i$.
 - b) la unión del segmento de recta que une 0 con 1 y el segmento de recta que une 1 con $1 + i$.

¿Existe F analítica tal que $F'(z) = \bar{z}^2$?

4. Si γ es la circunferencia unitaria, prueba que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e.$$

5. En los siguientes ejercicios, γ denota la circunferencia unitaria. Evalúa las integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$

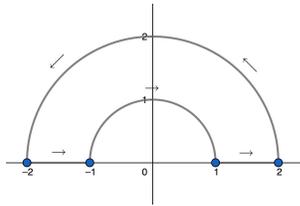
d) $\int_{\gamma} \left| \frac{1}{z} dz \right|.$

b) $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|} dz.$

e) $\int_{\gamma} z e^{z^2} dz.$

c) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} |dz|.$

6. Calcula la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$, donde γ es la curva representada en la figura.



7. Evalúa la integral $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y γ es la circunferencia $|z - z_0| = R$.

8. Sean $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en U y γ una curva cerrada C^1 por partes contenida en U . Muestra que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

es un número imaginario puro.

9. Si γ es la elipse $\gamma(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a^2 - b^2 = 1$, muestra que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pm 2\pi.$$

10. Muestra que

$$\int_{|z|=1} \frac{\log z}{z} dz = 0$$

aunque $(\log z)/z$ no sea analítica en $|z| \leq 1$.

11. Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz.$$

$$b) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}. \text{ Sugerencia: Fracciones parciales.}$$

$$c) \int_{|z-r|=r} \frac{z}{z^4 - 1} dz, r > 1.$$

12. Calcula la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

donde γ es cualquier curva cerrada en \mathbb{C} . La respuesta depende de la posición relativa de a, b con respecto de γ .

13. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en un disco D , tal que $f = 0$ a lo largo de una curva γ simple cerrada. Muestra que $f = 0$ en el interior de γ .

14. Sea f analítica en U , γ una curva cerrada en U y $z_0 \notin \gamma$. Muestra que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

15. Sea f entera y $|f(z)| < M$ para z en la circunferencia $|z| = R$ con R fijo. Prueba que

$$\left| f^{(k)}(re^{i\theta}) \right| \leq \frac{k!M}{(R-r)^k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para toda $0 \leq r < R$.

16. Demuestra que

$$a) \int_0^{2\pi} e^{k \cos n\theta} \sin(k \sin n\theta) d\theta = 0,$$

$$b) \int_0^{2\pi} e^{k \cos n\theta} \cos(k \sin n\theta) d\theta = 2\pi.$$

17. Sea f analítica en U y $f'(z_0) \neq 0$. Prueba que si γ es una circunferencia suficientemente pequeña con centro en z_0 , entonces

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Sugerencia: Usa el teorema de la función inversa.

18. Considera la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

a) Observa que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para cualquier curva cerrada que no pasa por 0 y f no es analítica en 0. ¿Contradice esto el teorema de Morera?

b) $f(z)$ es acotada cuando $|z| \rightarrow \infty$ pero no es constante. ¿Contradice esto el teorema de Liouville?

19. Sea f una función entera tal que $|f(z)| < |z|^n$ para cierta $n \in \mathbb{N}$ y todo $|z|$ suficientemente grande. Demuestra que f es un polinomio.

20. Encuentra el máximo de $\cos z$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

21. Usa el teorema del módulo máximo para mostrar que si $|z_0| < R$, la transformación

$$T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

manda el disco abierto $D = D(0, R)$ de manera biyectiva en $D(0, 1)$, con $T(z_0) = 0$.

22. Sean f, g analíticas en U y A un abierto acotado contenido en U . Si $f = g$ en ∂A , muestra que $f = g$ en A .

23. Sea f analítica en el disco unitario, de modo que $|f(z)| = |z|$ para todo $|z| < 1$. Prueba que $f(z)$ es de la forma $e^{i\theta} z$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$.

24. Sea $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica acotada en \mathbb{C} . Demuestra que u es constante.

25. Sean U una región acotada de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, no constante, con $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Muestra que el mínimo de $|f(z)|$ no se puede alcanzar en un punto interior de U .

26. Sean U una región acotada de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, no constante en U . Supongamos que para algún $c \in \mathbb{R}$ la curva de nivel $\{z : |f(z)| = c\}$ está contenida en U . Demuestra que existe al menos un cero de f en el interior de la región determinada por dicha curva de nivel.

Capítulo 4

Series

Ahora estudiaremos a las funciones analíticas desde el punto de vista de las series. Primero daremos un panorama de la teoría general y posteriormente nos enfocaremos en el caso particular de las series de potencias (tanto positivas como negativas).

4.1. Sucesiones de funciones

Aunque ya mencionamos algunas propiedades de las sucesiones de funciones, aquí profundizaremos un poco más sobre el tema y en la siguiente sección nos fijaremos en las series de funciones. Recordemos primero la definición de convergencia uniforme:

Definición 4.1. Sea $\{f_n: A \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A . Decimos que la sucesión *converge uniformemente* a una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que si $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (4.1)$$

para todo $z \in A$.

Ya mencionamos antes una primera consecuencia de la convergencia uniforme: Si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente a una función f , entonces f es continua. La convergencia uniforme también se comporta bien con las operaciones de integración y derivación. Veamos primero el caso de la integración.

Proposición 4.2. Sean U una región de \mathbb{C} , $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 por partes y $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ en U . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Lo anterior también se puede escribir como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz;$$

de manera informal, podemos decir que bajo la convergencia uniforme podemos *intercambiar* el límite con la integral.

Demostración. Como cada f_n es continua y la convergencia es uniforme, f también es continua y tiene sentido integrarla a lo largo de γ . Dada $\epsilon > 0$, sabemos que existe N tal que si $n \geq N$ se cumple la condición (4.1) para todo $z \in U$. Entonces, para $n \geq N$,

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| |dz| < \epsilon \cdot \text{long}(\gamma),$$

lo que demuestra la afirmación. \square

Un segundo vistazo a la demostración de la proposición anterior muestra que en realidad no es necesario pedir que la sucesión converja uniformemente en U , sino sólo *en subconjuntos compactos* de U , pues en este caso sólo necesitamos la convergencia uniforme en los puntos de γ .

Ejemplo 4.3. Hemos visto que la sucesión $f_n(z) = z^n$, $z \in D(0, 1)$ no converge uniformemente en $D(0, 1)$. Veamos que esta sucesión converge uniformemente en subconjuntos compactos: Puesto que cualquier conjunto compacto contenido en $D(0, 1)$ está contenido en un disco cerrado $\overline{D(0, r)}$ con $r < 1$, basta demostrar que $f_n(z)$ converge uniformemente (a la función 0) en cualquier disco cerrado de este tipo. Pero

$$|f_n(z) - 0| = |z^n| \leq r^n,$$

para todo $z \in \overline{D(0, r)}$. Como $r < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, de modo que obtenemos la convergencia uniforme en $\overline{D(0, r)}$.

Haremos una pequeña modificación: Aunque en el fondo estamos usando el concepto de convergencia uniforme *en compactos*, para simplificar la exposición usaremos un concepto más manejable, el de *convergencia uniforme en discos cerrados*:

Definición 4.4. Sea $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto abierto U . Decimos que la sucesión *converge uniformemente en discos cerrados* a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ si y sólo si para cada disco cerrado $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que si $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in \overline{D(z_0, r)}$.

Usamos este concepto en el teorema que relaciona la analiticidad de cada f_n con la analiticidad de la función límite f .

Teorema 4.5 (Weierstrass). *Sea $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas en un conjunto abierto U que converge uniformemente en discos cerrados a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en U y para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que $f_n^{(k)}(z)$ converge uniformemente a $f^{(k)}(z)$ en discos cerrados.*

Demostración. Para demostrar que f es analítica, usaremos el teorema de Morera; es decir, mostraremos que f es continua y que para cada disco $D \subset U$ y cada curva γ cerrada C^1 por partes contenida en D se tiene que $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Que f es continua es consecuencia de la convergencia uniforme de las funciones f_n (analíticas). Por el teorema de Cauchy, $\int_\gamma f_n(z) dz = 0$ para cada curva γ de este tipo. Pero por la proposición 4.2, $\lim \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$. Como ya dijimos, por el teorema de Morera, f es analítica en U .

Para demostrar que las derivadas de las f_n convergen uniformemente a las derivadas correspondientes de f en discos cerrados, consideremos un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$ totalmente contenido en U . Por la convergencia uniforme en este disco, dada $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, r)$. En adelante, sea $n \geq N$.

Aplicamos la fórmula integral de Cauchy a las funciones en cuestión:

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \text{y} \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw,$$

donde γ es una circunferencia de radio $\rho > r$ que también está contenida en U . Entonces

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w-z|^{k+1}} |dw|;$$

por la convergencia uniforme, el numerador de la fracción que está dentro de la integral queda acotado por ϵ . En cuanto al denominador, observemos que w pertenece a la circunferencia de radio ρ con centro en z_0 , mientras que z pertenece al disco cerrado de radio r con centro en z_0 . Así, la menor distancia entre cualesquiera de estos w, z resulta ser $\rho - r$ y obtenemos la cota

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\epsilon}{(\rho - r)^{k+1}} \int_\gamma |dw| = \frac{k! \rho}{(\rho - r)^{k+1}} \epsilon,$$

para todo $z \in \overline{D}(z_0, r)$; es decir, $f_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en cualquier disco cerrado contenido en U . \square

Para finalizar esta sección sólo mencionaremos que las propiedades correspondientes (convergencia de integrales y derivadas) se extienden de manera natural al caso de las series de funciones. El lector puede dar la demostración del siguiente resultado sin mayor problema.

Teorema 4.6 (Weierstrass). *La suma de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas es analítica y puede derivarse o integrarse término por término.*

4.2. Series de potencias

Una serie de potencias tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (4.2)$$

Lema 4.7 (Abel). Sean $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos y r_0, M reales positivos tales que $|a_n|r_0^n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $r < r_0$, la serie (4.2) converge en forma absoluta y uniforme en $\overline{D}(z_0, r)$.

Demostración. Sean

$$M_n = M \left(\frac{r}{r_0} \right)^n;$$

como $r < r_0$, tenemos que $r/r_0 < 1$ y por tanto la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge. Notemos que con esto tenemos la segunda hipótesis de la prueba M de Weierstrass (Teorema 2.8). Por otro lado,

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n = (|a_n|r_0^n) \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \leq M_n;$$

es decir $|a_n(z - z_0)^n| \leq M_n$, de modo que por la prueba M de Weierstrass tenemos que la serie converge uniforme y absolutamente. \square

Teorema 4.8. Para cada serie de potencias (4.2) existe $0 \leq R \leq \infty$, llamado radio de convergencia, tal que si:

1. $|z - z_0| < R$, la serie converge.
2. $|z - z_0| > R$, la serie diverge.
3. Además, la convergencia de la serie es uniforme y absoluta en discos cerrados contenidos en $D(z_0, R)$.

Demostración. Sea

$$R = \sup \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n \text{ converge} \right\}.$$

Afirmamos que R es el radio de convergencia.

1. Dado $r_0 < R$, existe r_1 tal que $r_0 < r_1 < R$ y tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r_1^n$ converge. Esto implica que la sucesión $\{|a_n|r_1^n\}$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a_n|r_1^n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el lema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0, r_0)$.

2. Si $|z_1 - z_0| > R$, supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ converge. Entonces el conjunto $\{|a_n|r_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ estaría acotado, con $r_1 = |z_1 - z_0| > R$. Tomando $R < r < r_1$, por el lema de Abel la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)$ convergería absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$. En particular si tomamos $z = z_0 + r$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ sería convergente, pero esto contradice la definición de radio de convergencia, pues $r > R$.
3. Como la convergencia es absoluta y uniforme en cualquier disco cerrado de la forma $\overline{D}(z_0, r)$ para todo $r < R$, también lo es en cualquier otro disco cerrado contenido en $D(z_0, R)$. \square

Al círculo $|z - z_0| = R$ se le llama *círculo de convergencia*.

Corolario 4.9. *La serie de potencias (4.2) es analítica en el interior del círculo de convergencia.*

Demostración. Basta ver que las funciones $a_n(z - z_0)^n$ son enteras, por lo que el resultado se tiene por el teorema de Weierstrass para series (Teorema 4.6). \square

4.3. Funciones analíticas y series de Taylor

Uno de los resultados importantes es que una función f es analítica si y sólo si f es igual a su serie de Taylor. Más adelante precisaremos esta idea, pero conviene recordar que esta propiedad no es válida para funciones reales: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

Es bastante probable que en sus cursos de cálculo el lector haya demostrado que f es de clase C^∞ , pero tanto $f(0)$ como todas las derivadas de f en 0 se anulan, de modo que f no es igual a su serie de Taylor en $x = 0$.

Para el caso complejo iremos trabajando poco a poco. Primero mostraremos una versión particular del teorema de Taylor:

Teorema 4.10. *Sean U una región de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Entonces para $z_0 \in U$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + f_k(z)(z - z_0)^k, \text{ donde } f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre k . Para $k = 1$, queremos mostrar que

$$f(z) = f(z_0) + f_1(z)(z - z_0),$$

con $f_1(z)$ analítica. La expresión anterior sugiere definir

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0), & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

f_1 tiene una singularidad removible en z_0 , pues $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)(z - z_0) = 0$, de modo que en realidad f_1 es analítica. Esto muestra el caso $k = 1$.

Ahora supongamos que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(k-2)}(z_0)}{(k-2)!}(z - z_0)^{k-2} + f_{k-1}(z)(z - z_0)^{k-1},$$

donde $f_{k-1}(z)$ es analítica y

$$f_{k-1}(z_0) = \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Aplicando el caso $k = 1$ a la función f_{k-1} , tenemos que

$$f_{k-1}(z) = f_{k-1}(z_0) + f_k(z)(z - z_0),$$

con f_k analítica. Sustituyendo en la expresión de arriba, tomando en cuenta el valor de $f_{k-1}(z_0)$, tenemos

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + f_k(z)(z - z_0)^k;$$

derivando k veces y evaluando en z_0 , tenemos que $f^{(k)}(z_0) = k!f_k(z_0)$, de donde

$$f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad \square$$

Ahora mostraremos que una función analítica es igual a su serie de Taylor. En realidad, esta afirmación no es cien por ciento cierta, pues por un lado tenemos que una serie de potencias posee un radio de convergencia, mientras que la función f podría estar definida en un abierto más grande que el círculo de convergencia de la serie. El enunciado formal es como sigue.

Teorema 4.11 (Taylor). *Sea U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U y $z_0 \in U$. Entonces se da la igualdad*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

en el máximo disco $D(z_0, R)$ contenido en U . Además, la convergencia de la serie es uniforme en cualquier disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset D(z_0, R)$.

Demostración. Por el Teorema 4.10, f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + f_k(z)(z - z_0)^k, \quad (4.3)$$

donde f_k es una función analítica.

Consideremos un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset D(z_0, R)$ y γ una circunferencia con centro en z_0 y radio $\rho \in (r, R)$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy a f_k , tenemos

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_k(w)}{w - z} dw, \quad z \in \overline{D}(z_0, r);$$

usando la expresión (4.3) para $f_n(w)$ dentro del signo de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \frac{1}{(w - z)(w - z_0)^k} \left(f(w) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (w - z_0)^n \right) dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)^k} dw - \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \int_{\gamma} \frac{dw}{(w - z)(w - z_0)^{k-n}} \right) dw \end{aligned}$$

En el lema siguiente mostraremos que cada una de las integrales

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{(w - z)(w - z_0)^{k-n}}, \quad n = 1, \dots, k-1,$$

se anula; suponiendo que esto ocurre, tenemos la siguiente expresión para $f_k(z)$:

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)^k} dw. \quad (4.4)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.3), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right| &= |f_k(z)(z - z_0)^k| \\ &= \left| \frac{(z - z_0)^k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)^k} dw \right|. \end{aligned}$$

Ahora haremos estimaciones de la última expresión. Como f es continua en γ , existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en γ . Recordando que $z \in \overline{D}(z_0, r)$ y que w está en la circunferencia de radio ρ con centro en z_0 , tenemos que $|z - z_0| \leq r$ y $|w - z_0| = \rho$. Por último, tenemos que la mínima distancia entre los puntos $z \in \overline{D}(z_0, r)$ y los puntos w de la curva γ es $\rho - r$. Reuniendo toda esta información, tenemos que

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right| \leq \left(\frac{r}{\rho} \right)^k \frac{M\rho}{\rho - r},$$

para todo $z \in \overline{D(z_0, r)}$. Puesto que $r < \rho$, la expresión del lado derecho tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Esto nos dice que la sucesión de sumas parciales de la serie de Taylor converge uniformemente a $f(z)$ en *cualquier* disco cerrado $\overline{D(z_0, r)}$ con $r < R$. Esto implica que la serie converge a $f(z)$ en el disco $D(z_0, R)$. \square

Para concluir la demostración necesitamos el siguiente lema, en el que usaremos una notación ligeramente diferente.

Lema 4.12. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos*

$$F_m(z_0) = \int_{\gamma} \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)^m};$$

entonces $F_m(z_0) = 0$ para cualesquiera z, z_0 en el interior de γ .

Demostración. Observemos que en el lema 3.25 estudiamos integrales de este tipo. Habíamos mostrado que si φ una función continua en los puntos de γ y

$$F_m(z_0) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^m} dw,$$

entonces F_m es analítica y $F'_m(z_0) = mF_{m+1}(z_0)$. En nuestro caso, $\varphi(w) = 1/(w-z)$, donde z se considera fijo. Usando inducción, basta verificar que $F_1(z_0) = 0$ para todo z_0 :

$$\begin{aligned} F_1(z_0) &= \int_{\gamma} \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)} = \frac{2\pi i}{z-z_0} \left(\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} - \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z_0} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{z-z_0} n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0; \end{aligned}$$

pues γ es una circunferencia que le da una vuelta a z y a z_0 . \square

Como una rápida aplicación del teorema de Taylor, mostraremos un resultado acerca de un cero de orden infinito.

Corolario 4.13 (del Teorema de Taylor). *Sean U una región de \mathbb{C} , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U y z_0 un cero de orden infinito de f ; es decir, $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces f es idénticamente nula en U .*

Demostración. Si z_0 es un cero de orden infinito, por el Teorema 4.11 tenemos que $f \equiv 0$ en el máximo disco $D(z_0, R)$ contenido en U . Pero esto dice que el conjunto de ceros de orden infinito de f es un conjunto abierto. Por otro lado, su complemento es el conjunto de puntos z tales que alguna derivada $f^{(n)}(z)$ es distinta de cero; por continuidad, este conjunto también es abierto. Como U es conexo y el conjunto de ceros de orden infinito no es vacío (pues z_0 existe por hipótesis), tenemos que f es idénticamente cero en U . \square

Corolario 4.14. *Sean U una región de \mathbb{C} y $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas. Supongamos que existe $z_0 \in U$ tal que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $f \equiv g$ en U .*

Definición 4.15. Sean U una región de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Un punto $z_0 \in U$ es un *cero de orden k de f* si y sólo si $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Proposición 4.16. *Un cero de orden k de f es aislado; es decir, existe una vecindad V de z_0 tal que el único cero de f en V es precisamente z_0 .*

Demostración. Recordemos del teorema 4.10 que f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + f_k(z)(z - z_0)^k, \quad f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Como $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, entonces

$$f(z) = f_k(z)(z - z_0)^k \quad (4.5)$$

con f_k analítica y $f_k(z_0) \neq 0$. Por continuidad, existe una vecindad V de z_0 donde $f_k(z) \neq 0$ y por tanto $f(z) \neq 0$. \square

Así, sólo tenemos las siguientes alternativas para los ceros de una función analítica f :

- Si z_0 es un cero de orden finito, entonces es un cero aislado.
- Si z_0 es un cero de orden infinito de f , entonces $f \equiv 0$, de modo que z_0 está rodeado de ceros.

4.4. Series de Laurent

En esta sección estudiaremos una generalización de las series de Taylor. Como sabemos, una serie de Taylor es una serie de potencias con *potencias positivas*. En el caso de las series de Laurent, permitimos el uso de *potencias negativas*. Podemos formalizar esto como sigue.

Definición 4.17. Una *serie de Laurent con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$* es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (4.6)$$

donde los coeficientes $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Decimos que la primera serie es la *parte regular* de la serie de Laurent, mientras que la segunda serie es su *parte singular*. La serie de Laurent *converge* si sus partes regular y singular convergen.

Es claro que la serie en (4.6) se puede escribir de manera más compacta como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

si definimos $a_{-n} = b_n$.

¿Cómo analizar la convergencia de una serie de Laurent? Sabemos que la parte regular es una serie de potencias, por lo que existe su radio de convergencia R y la serie converge para $|z - z_0| < R$. En cuanto a la parte singular, observemos que también podemos escribirla como una serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

donde $w = 1/(z - z_0)$. Esta serie de potencias también tiene su radio de convergencia, que misteriosamente llamaremos $1/r$, tal que si $|w| < 1/r$, la serie converge. Esto nos dice que la parte singular converge si $|z - z_0| > r$. Entonces la serie de Laurent convergerá para los $z \in \mathbb{C}$ que satisfagan a la vez $|z - z_0| < R$ y $|z - z_0| > r$. Por supuesto, si $R \leq r$, el conjunto de z que satisfacen ambas condiciones es vacío, de modo que a partir de ahora supondremos que $r < R$. Debemos observar que permitimos que $r = 0$ o $R = \infty$.

Usaremos una notación¹ para dicho conjunto.

Definición 4.18. Sean $r, R \in \mathbb{R} \cup \{0, \infty\}$ tales que $r < R$. El *anillo (abierto)* con centro en z_0 y radios r, R es el conjunto

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

Proposición 4.19. Sean $1/r$ y R los radios de convergencia de las series $\sum b_n w^n$ y $\sum a_n w^n$, respectivamente. Supongamos que $r < R$. Entonces la serie de Laurent (4.6) converge en el anillo $A_{r,R}(z_0)$.

Además, la convergencia de la serie de Laurent es uniforme en cualquier anillo cerrado contenido en el anillo $A_{r,R}(z_0)$; es decir, en

$$\overline{A_{\rho_1, \rho_2}(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : r < \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2 < R\}$$

Demostración. En realidad, sólo falta analizar qué ocurre con la convergencia uniforme. Como R es el radio de convergencia de la parte regular de la serie, sabemos que la convergencia de esta parte regular es uniforme en cualquier disco cerrado $\overline{D}(z_0, \rho_2)$ contenido en $D(z_0, R)$. Análogamente, como $1/r$ es el radio de convergencia de $\sum b_n w^n$, esta serie converge de manera uniforme en cualquier disco cerrado $|w| \leq 1/\rho_1 < 1/r$, lo que implica que la parte singular de la serie de Laurent converge de manera uniforme si $|z - z_0| \geq \rho_1$. Al reunir la información de ambas partes, obtenemos el resultado. \square

Corolario 4.20. Bajo las condiciones de la proposición anterior, la serie de Laurent (4.6) define una función analítica en el anillo $A_{r,R}(z_0)$.

Nuestro objetivo ahora es demostrar una especie de recíproco de este corolario, a saber:

¹Cabe aclarar que la notación que usaremos no es estándar.

Teorema 4.21 (Laurent). *Sea f una función analítica en el anillo $A_{r,R}(z_0)$. Entonces f se escribe de manera única como una serie de Laurent (4.6), donde los coeficientes están dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw,$$

aquí, γ es una circunferencia con centro en z_0 y radio arbitrario $\rho \in (r, R)$.

Observemos que por el teorema de Cauchy, las integrales anteriores no dependen de la circunferencia elegida, siempre que esté contenida en el anillo.

Demostración. Es fácil mostrar la unicidad de la serie de Laurent. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n};$$

sustituimos w por z y dividimos entre $(w - z_0)^{k+1}$ para obtener

$$\frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^{n-k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(w - z_0)^{n+k+1}};$$

gracias a la convergencia uniforme, podemos integrar término a término las dos series; pero observemos que la única integral que no se anula es aquella con potencia $(w - z_0)^{-1}$, que aparece en este caso en la parte regular de la serie, cuando $n = k$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw = a_n \int_{\gamma} (w - z_0)^{-1} dw = 2\pi i a_n.$$

Análogamente,

$$f(w)(w - z_0)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^{n+k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(w - z_0)^{n-k+1}};$$

y al integrar obtenemos

$$\int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{k-1} dw = \int_{\gamma} \frac{b_k}{w - z_0} dw = 2\pi i b_k,$$

como afirmábamos.

Para demostrar que f se puede escribir como una serie, consideramos una curva cerrada contenida en el anillo $A_{r,R}(z_0)$. Sean

- $\gamma_j = z_0 + r_j e^{it}$, $j = 1, 2$, con $r < r_1 < r_2 < R$ y $t \in [0, 2\pi]$;
- $\sigma(t) = t$, $t \in [r_1, r_2]$.

La curva $\gamma = \gamma_2 - \sigma - \gamma_1 + \sigma$ es cerrada, C^1 por partes y está contenida en el anillo. Entonces, aplicando la fórmula integral de Cauchy a los puntos en el interior de γ , usando el hecho de que $n(\gamma, z) = 1$ para tales puntos,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Analizaremos cada una de las dos últimas integrales por separado; la primera dará lugar a la parte regular de la serie de Laurent y la segunda a la parte singular. La idea es tratar de escribir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

como una serie de potencias alrededor de z_0 . Si desarrollamos $1/(w-z)$ en serie de Taylor alrededor de z_0 , tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + \cdots;$$

también podríamos haber procedido directamente, recordando que para una serie geométrica, $\sum a^n = 1/(1-a)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z},$$

y la convergencia es uniforme (en w) para los puntos z en el interior de γ_2 , pues en tal caso $|(z-z_0)/(w-z_0)| < 1$. En resumen, tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Usamos esto y las propiedades de la convergencia uniforme para re-escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Procedemos de manera análoga con la parte singular, observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{z-z_0}{w-z},$$

donde ahora la convergencia es uniforme en w para z en el exterior de γ_1 . Así,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right) \frac{1}{(z-z_0)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}; \end{aligned}$$

reuniendo la información, obtenemos la afirmación deseada. \square

4.5. Clasificación de singularidades

Supongamos que una función f está definida y es analítica en una vecindad de un punto z_0 , pero posiblemente no esté definida en dicho punto. En este caso decimos que z_0 es una *singularidad* de f . Más formalmente, consideremos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. En una vecindad de z_0 la función f se puede representar mediante una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Podemos considerar tres posibilidades para los coeficientes b_n de esta serie:

1. $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya hemos hablado antes de este caso, pues z_0 resulta ser una singularidad removible.
2. Existe $k \geq 1$ tal que $b_k \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > k$. En este caso, diremos que z_0 es un *polo de orden k* de f . Si $k = 1$, decimos que z_0 es un *polo simple*.
3. Existe una sucesión n_k tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ y $b_{n_k} \neq 0$ para todo k . Aquí decimos que z_0 es una *singularidad esencial*.

Ejemplo 4.22. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Es claro que $z = 1, 2$ son singularidades. Calcularemos la serie de Laurent de f en distintos dominios.

Consideremos primero el anillo $0 < |z-1| < 1$, usando una serie geométrica en la forma

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

de modo que

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1;$$

esto muestra que $z = 1$ es un polo de orden 1 de f ; más adelante daremos criterios más eficientes para determinar la naturaleza de cada singularidad.

Ahora consideremos el anillo $0 < |z-2| < 1$. Si escribimos

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} + g(z),$$

tenemos que $g(z)$ es analítica en este anillo, de modo que debe ser igual a su serie de Taylor basada en $z = 2$. Calculando las derivadas de g y evaluando en $z = 2$, tenemos que $g(2) = -1$, $g'(2) = 1$, $g''(2) = -2$, $g'''(2) = 3!$ y, en general, $g^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}n!$, de modo que

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)}(z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1,$$

de modo que, de nuevo, $z = 2$ es un polo de orden 1 de f .

Para concluir con este ejemplo, veamos qué ocurre en el anillo $1 < |z| < 2$. Puesto que $1/(z-2)$ es analítica en el disco $|z| < 2$, es igual a su serie de Taylor en $z = 0$, la que podemos obtener fácilmente usando de nuevo la serie geométrica:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-z/2)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

En cuanto a $1/(z-1)$, sabemos que esta función es analítica en la región $|z| > 1$, de modo que aquí conviene usar una serie geométrica en términos de $1/z$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1-1/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n};$$

reuniendo la información, tenemos

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad 1 < |z| < 2;$$

observemos que en esta región la serie de Laurent tiene una infinidad de términos con potencias tanto positivas como negativas.

Ejemplo 4.23. La función $f(z) = e^{-1/z}$ tiene una singularidad en $z_0 = 0$. De hecho, ésta es una singularidad esencial, pues la serie de Laurent de f en 0 es (¿por qué?)

$$f(z) = e^{-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

Analicemos el caso de una singularidad removible. Anteriormente vimos unas equivalencias con el hecho de que exista una singularidad de este tipo, pero ahora daremos otras más:

Proposición 4.24. *Sea U un conjunto abierto, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
2. Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (es decir, el límite es un número complejo);
3. $f(z)$ está acotada en una vecindad de z_0 ;
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0$.

Demostración. (1) implica (2): Como todo $b_n = 0$, la serie de Laurent de f es en realidad una serie de Taylor, de modo que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$.

(2) implica (3): Es un hecho básico derivado de la definición de límite.

(3) implica (4): Se deduce de que $f(z)$ está acotada y $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0$.

(4) implica (1): Recordemos la siguiente expresión para cada b_n :

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw;$$

donde γ es una circunferencia con centro en z_0 con un radio que elegiremos a continuación. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis, existe δ tal que si $|w - z_0| < \delta$ entonces $|f(w)(w - z_0)| < \epsilon$, o en forma equivalente, $|f(w)| < \epsilon/|w - z_0|$. Eligiendo el radio de la circunferencia de modo que $|w - z_0| = \delta/2$, obtenemos que

$$|b_n| < \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\epsilon}{\delta/2} (\delta/2)^{n-1} |dw| = \epsilon(\delta/2)^{n-1},$$

y por tanto $b_n = 0$ para todo n . □

En el caso que z_0 sea un polo de orden k de f , también tenemos varias condiciones equivalentes:

Proposición 4.25. *Sean U un conjunto abierto, $z_0 \in U$, $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $k \geq 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $b_n = 0$ para todo $n > k$; es decir, z_0 es un polo de orden $\geq k$;
2. Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k$;
3. $f(z)(z - z_0)^k$ está acotada en una vecindad de z_0 ;
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^{k+1} = 0$.

Demostración. (1) implica (2): De nuevo, nos fijamos en la serie de Laurent de f . Por hipótesis, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

de modo que

$$f(z)(z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+k} + \sum_{n=1}^k b_n(z - z_0)^{k-n}$$

y por tanto $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k = b_k$.

De nuevo, es fácil ver que (2) implica (3) y que (3) implica (4). Para mostrar que (4) implica (1), podemos imitar la demostración de la implicación correspondiente en la proposición anterior, o bien observar que la hipótesis (4) implica que la función $f(z)(z - z_0)^k$ tiene una singularidad removible en z_0 . Esto dice que

$$f(z)(z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

lo que implica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^k \frac{c_{k-n}}{(z - z_0)^n},$$

y por la unicidad de la serie de Laurent, tenemos que $b_n = 0$ para todo $n > k$. \square

Finalmente y como el lector podrá imaginar, las singularidades más complicadas son las esenciales. Como muestra de esta complejidad mencionaremos dos resultados.

Teorema 4.26 (Casorati-Weierstrass). *Sea $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con una singularidad esencial en z_0 . Entonces, para cualquier vecindad V de z_0 contenida en U , la imagen de $V \setminus \{z_0\}$ bajo f es densa en \mathbb{C} .*

Demostración. Basta demostrar la afirmación cuando V es un disco $D(z_0, r)$ contenido en U . Supongamos, por contradicción, que la imagen de $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ no es densa en \mathbb{C} . Entonces existe $w \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w| > \delta$$

para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Podemos definir entonces $g: D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w};$$

como $|g(z)| < 1/\delta$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) = 0$, de modo que g tiene una singularidad removible en z_0 y podemos definir $g(z_0)$ de modo que g sea analítica en $D(z_0, r)$. De aquí tenemos dos casos:

- Si $g(z_0) = 0$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$$

tiene un polo en z_0 (¿por qué?), lo que contradice la hipótesis de que z_0 sea una singularidad esencial de f .

- Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ es analítica en z_0 , lo que de nuevo contradice la hipótesis original y concluye la demostración. \square

El segundo resultado es más fuerte y su demostración se puede ver en [2].

Teorema 4.27 (Teorema grande de Picard). *Sea $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con una singularidad esencial en z_0 . Entonces para cualquier vecindad V de z_0 contenida en U , la imagen de la restricción de $V \setminus \{z_0\}$ bajo f cubre a todo el plano, excepto tal vez por un solo punto.*

Los puntos más importantes relativos a una función f serán sus singularidades. Si la función no tiene singularidades esenciales, entonces sólo tendremos singularidades removibles y polos.

Definición 4.28. Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es *meromorfa* si y sólo si sus únicas singularidades son removibles o polos.

Proposición 4.29. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de f si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$; en este caso diremos que $f(z_0) = \infty$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un polo en z_0 , de modo que su serie de Laurent es de la forma (4.6), es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

de esta expresión es claro que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Recíprocamente, supongamos que se cumple esta condición. Entonces $g(z) = 1/f(z)$ tiene un cero en $z = z_0$. Puesto que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) = 0,$$

tenemos que g tiene una singularidad removible en z_0 . Esto implica que z_0 es un cero de orden finito de g y podemos escribir $g(z) = g_n(z)(z - z_0)^n$ con $g_n(z_0) \neq 0$, donde n es el orden del cero de g ; así,

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g_n(z)} \frac{1}{(z - z_0)^n}, \text{ o bien } f(z) = f_n(z)(z - z_0)^{-n}, \text{ con } f_n(z_0) \neq 0.$$

Como $f_n(z)$ es analítica, es igual a su serie de Taylor, que escribimos como

$$f_n(z) = b_n + b_{n-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

donde por el momento no calcularemos en forma explícita los coeficientes. Así, sustituyendo tenemos que

$$f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

y por tanto f tiene un polo en z_0 . □

A continuación veremos dos ejemplos de cálculo de series de Laurent.

Ejemplo 4.30. Calcularemos la serie de Laurent de la función

$$f(z) = (z - 3) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z + 2} \right)$$

en el punto $z_0 = -2$ y determinaremos qué tipo de singularidad es.

Sabemos que la serie de Maclaurin del seno está dada por

$$\operatorname{sen}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si hacemos $w = \frac{1}{z+2}$, tenemos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{1}{z+2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}}.$$

Notemos que

$$f(z) = (z - 3) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z+2} \right) = (z + 2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z+2} \right) - 5 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z+2} \right);$$

así,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n}} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} \end{aligned}$$

Para la primera suma, hagamos $m = 2n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(m\pi/2)}{(m+1)!(z+2)^m}$$

Para la segunda suma hagamos $m = 2n + 1$; entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{5 \cos((m-1)\pi/2)}{m!(z+2)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5(m+1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} m \right)}{(m+1)!(z+2)^m};$$

la última igualdad se da porque $\sin\left(\frac{m}{2}\pi\right) = 0$ si $m = 0$.

Así, la serie de Laurent de $f(z)$ está dada por

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m}{2}\pi\right) + 5(m+1)\sin\left(\frac{m}{2}\pi\right)}{(m+1)!(z+2)^m}$$

Por último notemos que en la serie de $f(z)$ se tiene que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $z_0 = -2$ es una singularidad esencial.

Ejemplo 4.31. Ahora analizaremos la función

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

alrededor de $z_0 = -2$. Usando fracciones parciales, podemos escribir a f como

$$f(z) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}.$$

Observemos que

$$\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{1-(z+2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n,$$

siempre que $|z+2| < 1$. Así, la serie de Laurent de $f(z)$ está dada por

$$f(z) = \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n,$$

siempre que $0 < |z+2| < 1$. Notemos que $b_n = 0$ para todo $n \geq 2$, es decir $z_0 = -2$ es un polo simple.

Ejemplo 4.32. Ahora encontraremos la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2}$$

en los anillos $1 < |z| < 2$ y $|z| > 2$. Notemos que

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} \right),$$

por lo que primero calcularemos la serie de $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$ y luego derivaremos.

Consideremos primero el anillo $1 < |z| < 2$. Como $|z| > 1$, $|1/z| < 1$. Por otro lado, $|z| < 2$, de manera que $|z/2| < 1$; así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Derivando tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} z^{n-1};$$

cambiando los índices en ambas sumas tenemos

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{z^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{2^{m+2}} z^m$$

para el anillo $|z| > 2$. Como $1 < |z| < 2$ tenemos $|2/z| < 1$ y $|1/z| < 1$. Así,

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Derivando,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{z^{n+3}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{z^m} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{2^{m-3}(m-2)}{z^m};$$

observemos que podemos comenzar la segunda suma desde $m = 2$.

Finalmente la serie de Laurent de $f(z)$ en el anillo $|z| > 2$ está dada por

$$f(z) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1) + 2^{m-3}(m-2)}{z^m}$$

El término más importante de la serie de Laurent es el correspondiente a b_1 ; tan importante que merece una definición.

Definición 4.33. Sea f una función analítica en una vecindad de z_0 . El *residuo de f en z_0* $\text{Res}(f, z_0)$ es el coeficiente b_1 en la serie de Laurent de f en z_0 .

¿Por qué es importante el residuo? Pensemos, a manera de ejemplo, que z_0 es la única singularidad de f y que γ es una circunferencia con centro en z_0 , contenida en el dominio de f . Usando la serie de Laurent de f y las propiedades de convergencia uniforme, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(w) dw &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (w-z_0)^n dw + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} \frac{1}{(w-z_0)^n} dw \\ &= 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}(f, z_0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Así, el residuo de f nos da toda la información necesaria para calcular la integral de f . En la siguiente sección desarrollaremos algunas técnicas particulares para determinar los residuos de f en sus singularidades y las aplicaremos en el cálculo de integrales.

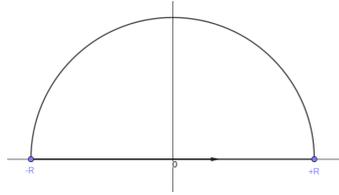


Figura 4.1: Las curvas γ y γ_k para la demostración del teorema del residuo.

4.6. Teorema del residuo. Cálculo de residuos

Como en el caso del teorema de Cauchy, el teorema del residuo tiene varias versiones. Esencialmente, este resultado nos dice que podemos calcular la integral de una función f a lo largo de una curva cerrada γ como la suma de los residuos de la función en las singularidades que se encuentran en el interior de γ . Una formulación general tendría que tomar en cuenta el número de vueltas que le da la curva a cada singularidad, así como el hecho de que la región donde está definida f sea simplemente conexa o no. Aquí enunciaremos sólo el caso más sencillo, pues será el que usaremos en las aplicaciones.

Teorema 4.34 (del residuo). *Sea U una región simplemente conexa de \mathbb{C} y $z_1, \dots, z_n \in U$. Sea $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y γ una curva simple, cerrada, C^1 por partes contenida en U y que no pase por los puntos z_k . Entonces*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

En este caso, sólo daremos una idea de la demostración, la cual se puede consultar en [7]. Puesto que tenemos un número finito de puntos z_1, \dots, z_n , para cada uno de estos puntos podemos elegir una pequeña circunferencia γ_k con centro en z_k , que no interseque a las demás y que esté contenida en U (ver Figura 4.6). En realidad sólo hay que ver que la integral de f sobre γ es la suma de las integrales sobre las γ_k , pues entonces, usando (4.7),

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(w) dw = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Para mostrar la primera igualdad, recurrimos a un argumento de homotopía: La curva γ es homotópica a la unión de las γ_k junto con una serie de segmentos que unen a estas circunferencias, recorridos “de ida y vuelta”. Como dijimos, no daremos la demostración detallada, pero la Figura 4.6 dará una idea de la plausibilidad de este hecho.

Una de las aplicaciones del teorema del residuo será al cálculo de integrales, siempre y cuando podamos calcular de manera sencilla los residuos de una

función. A continuación veremos algunas de estas formas sencillas de cálculo de residuos y su aplicación a algunas integrales.

Puesto que el teorema del residuo nos dice que podemos calcular la integral por medio de una suma de términos, supongamos de hecho que la función f tiene una sola singularidad en z_0 , y además, que ésta no es una singularidad esencial (JUSTIFICAR). Entonces puede ocurrir que z_0 sea una singularidad removible, en cuyo caso $\text{Res}(f, z_0) = 0$, o bien que z_0 sea un polo de orden finito k . Veamos cómo calcular el residuo en este último caso.

Supongamos en primer lugar que z_0 es un polo simple. En este caso, el desarrollo en serie de Laurent cerca de z_0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0}.$$

y entonces es claro que

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0).$$

Así, por ejemplo, tenemos que

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z} z = 1$$

y

$$\text{Res}\left(\frac{z}{z^2 + 1}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z^2 + 1} (z - i) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.35. Antes de analizar qué ocurre con polos de orden $k > 1$, ya podemos ver una sencilla aplicación del teorema del residuo. Calcularemos la integral real

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad a > 0.$$

Dado que el coseno es una función par, la integral en cuestión se puede calcular como la mitad de la integral en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para transformar esta integral en una integral compleja, consideremos $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Recordemos que si $|z| = 1$,

$$\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

de modo que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Así, podemos escribir la integral en cuestión como

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Ahora calcularemos la última integral usando el teorema del residuo². Observemos que el denominador se puede factorizar como

$$z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Dejaremos que el lector verifique que la única singularidad que cae dentro de la circunferencia unitaria es $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, que es un polo simple. Tenemos que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, z_1\right) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}(z - z_1) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}};$$

por tanto,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, z_1\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

En este ejemplo, las singularidades de la función eran polos simples. Antes de enunciar el caso general de un polo de orden k , veamos qué pasa si z_0 es un polo de orden 2 de f . La serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2}.$$

Observemos que la función $f(z)(z - z_0)^2$ tiene la forma

$$f(z)(z - z_0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+2} + \frac{b_1}{z - z_0} + b_2,$$

de modo que

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (f(z)(z - z_0)^2).$$

Ejemplo 4.36. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, \quad a > 0,$$

la que podemos escribir como

$$f(z) = \frac{1}{(z - ai)^2(z + ai)^2}.$$

Es claro que la función tiene polos de orden 2 en $\pm ai$. Entonces tenemos que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, \pm ai\right) = \lim_{z \rightarrow \pm ai} \frac{d}{dz} (f(z)(z \mp ai)^2) = \pm \frac{1}{4a^3i}.$$

²Por supuesto, esta integral se puede resolver usando fracciones parciales, pero la usaremos como ilustración del método actual.

Dejaremos la demostración del caso general a cargo del lector.

Proposición 4.37. *Sea z_0 un polo de orden k de f . Entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z)(z-z_0)^k).$$

Ahora consideremos el caso particular en que la función f sea el cociente de dos funciones analíticas, $f = g/h$. Puesto que queremos analizar los polos de esta función, supondremos que z_0 es un cero de orden m de h , esto implica que existe una función analítica h_m que satisface (ver la ecuación 4.5)

$$h(z) = (z-z_0)^m h_m(z), \quad h_m(z_0) = \frac{h^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

En cuanto a la función g del numerador de f , puede pasar que z_0 sea un cero de g , de orden menor, igual o mayor que m . Debe ser más o menos claro para el lector que si z_0 es un cero de g de orden mayor o igual a m , entonces el cociente en realidad será una función analítica, de modo que podemos suponer que dicho orden es estrictamente menor que m ; si lo denotamos por k , tenemos que

$$g(z) = (z-z_0)^k g_k(z), \quad g_k(z_0) = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

El cociente cumple entonces que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^k g_k(z)}{(z-z_0)^m h_m(z)}.$$

Observemos que g_k/h_m es el cociente de dos funciones analíticas y que el denominador no se anula en z_0 . Esto implica que el cociente se puede escribir en términos de una serie de Taylor y así tenemos que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k-m}.$$

Analicemos ahora algunos casos particulares de esta situación. Supongamos primero que $g(z_0) \neq 0$, de modo que z_0 es un cero de orden 0 de g y que $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, de modo que z_0 es un cero de orden 1 de h . Así, hacemos $k=0$ y $m=1$ en la igualdad anterior para obtener

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1} = \frac{a_0}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z-z_0)^n,$$

de modo que el residuo es justamente a_0 , que no es otra cosa que el valor de la serie de Taylor de g_k/h_m en $z = z_0$:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_0 = \frac{g_0(z_0)}{h_1(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Una idea similar funciona cuando z_0 es a la vez un cero de orden k de g y un cero de orden $m = k + 1$ de h . Ahora g_k/h_{k+1} es analítica y si su serie de Taylor es $\sum a_n(z - z_0)^n$, entonces la serie de Laurent de f tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1} = \frac{a_0}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^n;$$

la única diferencia es que ahora

$$\text{Res}(f, z_0) = a_0 = \frac{g_k(z_0)}{h_{k+1}(z_0)} = \frac{g^{(k)}(z_0)/k!}{h^{(k+1)}(z_0)/(k+1)!} = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$

Como ejemplo un poco más concreto, analicemos la función $z/(1 - \cos z)$. El origen 0 es un cero de orden 1 de $g(z) = z$ y un cero de orden 2 de $h(z) = 1 - \cos z$. Entonces

$$\text{Res}\left(\frac{z}{1 - \cos z}, 0\right) = 2 \frac{g'(0)}{h''(0)} = 2;$$

y como aplicación, por el teorema del residuo,

$$\int_{|z|=1} \frac{w}{1 - \cos w} dw = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z}{1 - \cos z}, 0\right) = 4\pi i.$$

Dejaremos que el lector analice, enuncie y demuestre el caso más general, en que z_0 es un cero de orden k de g y un cero de orden m de h , con $m - k \geq 2$. Por supuesto, puede ir analizando primero el caso $m - k = 2$ para ir viendo qué ocurre.

4.7. Cálculo de integrales

En esta sección usaremos el teorema del residuo y las fórmulas obtenidas en la sección anterior para calcular diversas integrales reales.

Ejemplo 4.38. En el ejemplo 4.35 evaluamos una integral de una función real que dependía de una función trigonométrica,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad a > 0.$$

haciendo la sustitución $z = e^{i\theta}$, de modo que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (4.8)$$

En general, si tuviéramos que evaluar la integral de una función trigonométrica, podríamos hacer sustituciones de este tipo; por ejemplo, si la función por integrar contiene un término $\sin \theta$, hacemos $z = e^{i\theta}$, entonces

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Por ejemplo, consideremos la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$

Haciendo la sustitución (4.8), tenemos que

$$\cos 3\theta = \frac{e^{3\theta i} + e^{-3\theta i}}{2} = \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right)$$

y

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right)}{5 - \frac{4}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz.$$

Es claro que el último integrando tiene un polo de orden 3 en 0 y polos simples en $\frac{1}{2}$ y 2. Sólo tenemos que calcular los residuos en las dos primeras singularidades. Es claro que

$$\text{Res} \left(\frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)}, \frac{1}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1/2} \left(\frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{65}{12}.$$

Por otro lado, usando la Proposición 4.37, tenemos que

$$\text{Res} \left(\frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)}, 0 \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} z^3 \right) = \frac{21}{4},$$

de modo que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = -\frac{2\pi i}{4i} \left(-\frac{65}{12} + \frac{21}{4} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Además de integrales trigonométricas, el teorema del residuo nos permite calcular otros tipos de integrales. Por ejemplo, consideremos una integral real impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Recordemos que hay dos maneras usuales de entender qué significa este símbolo: La primera consiste en *partir* a la recta real en dos, obteniendo dos integrales impropias, de modo que si ambas integrales convergen, entonces la expresión anterior tiene sentido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^a f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx.$$

La segunda forma consiste en fijarse en una manera particular de tender a infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

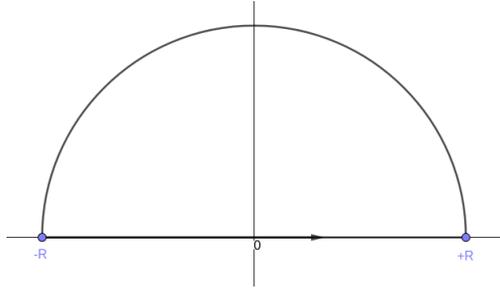


Figura 4.2: Curva γ_R para calcular la integral de $f(z)$.

Es esta segunda forma la que usaremos. En este caso, cuando el límite anterior existe, le llamaremos el *valor principal de Cauchy* de la integral. Todas las integrales que consideraremos se calcularán en este sentido.

Para aplicar el teorema del residuo, la idea general será la siguiente: Extendemos la función f al plano complejo, lo que por lo general lograremos de manera natural. Luego, integraremos la función $f(z)$ a lo largo de una curva γ_R , $R > 0$, como la que se muestra en la Figura 4.7; es decir, la curva que se obtiene al tomar el segmento de recta $(-R, R)$ sobre el eje real seguido de la semicircunferencia C_R dada por $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Por el teorema del residuo, la integral de f a lo largo de γ_R es el producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de las singularidades de f en el interior de γ_R . Al hacer R tender a infinito, obtendremos por un lado el producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de las singularidades de f en el semiplano superior. Por otro lado, la idea es *imponer condiciones adecuadas* a f para que la integral sobre la semicircunferencia C_R tienda a cero cuando $R \rightarrow \infty$.

¿A qué nos referimos con condiciones adecuadas? Pongamos un ejemplo para entender cómo obtenerlas. Consideremos una *función racional*, es decir, un cociente de polinomios, $P(x)/Q(x)$. Si queremos calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

entonces podemos extender la función de manera natural al plano complejo. Ahora, para poder aplicar el teorema del residuo a $P(z)/Q(z)$, debería ocurrir, al menos, que el grado k de P sea menor al grado m de Q . Además, queremos que la integral sobre la semicircunferencia C_R se vaya a cero. Hagamos una estimación preliminar de esta integral para que sea claro que debemos imponer una condición un poco más fuerte:

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(w)}{Q(w)} dw \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{P(w)}{Q(w)} \right| |dw|$$

si $k < m$, entonces $|P/Q| \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, de modo que si R es suficientemente grande, $|P/Q| < \epsilon$; pero esto sólo dice que el módulo de la integral es

menor que

$$\int_{C_R} \epsilon |dw| = \epsilon \cdot \text{long}(C_R) = \epsilon \cdot \pi R,$$

de modo que no podemos garantizar que lo anterior tienda a cero cuando $R \rightarrow \infty$. En cambio, sí lo podemos garantizar si el grado k de P es menor que $m - 1$, donde m es el grado de Q . Por supuesto, esto es equivalente a que k sea menor o igual a $m - 2$. En resumen,

Teorema 4.39. *Sea $f(z)$ una función racional tal que*

1. $f(z)$ no tiene polos sobre el eje real.
2. El grado del denominador excede, al menos por dos, al grado del numerador.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}(f(z), z_0)$$

Ejemplo 4.40. En el Ejemplo 4.36 consideramos la función

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, \quad a > 0,$$

que es una función racional y satisface las condiciones del teorema 4.39. La función tiene un polo doble en cada una de sus singularidades $\pm ai$ y el residuo correspondiente es $\pm\pi/(4a^3i)$. Como sólo el punto ai está en el semiplano superior y la función es par,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \pi i \text{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, ai \right) = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Veamos otro ejemplo en que podemos calcular integrales impropias reales por medio del teorema del residuo y un proceso de límite. La motivación es similar al caso que acabamos de ver, aunque ahora daremos la demostración después del enunciado.

Teorema 4.41. *Sea $f(z)$ una función racional tal que*

1. $f(z)$ no tiene polos sobre el eje real.
2. El grado del denominador excede, al menos por dos, al grado del numerador.

Entonces, para cada $a \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \text{Re} \left(2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_0) \right)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen } ax dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_0) \right).$$

Demostración. Sea γ_R la curva de la Figura 4.7. Puesto que f es un cociente de polinomios, sus polos, al igual que los de $f(z)e^{iaz}$, ocurren sólo en los ceros del denominador y por tanto son un número finito. Si elegimos R suficientemente grande, todos los polos de $f(z)$ que estén en el semiplano superior estarán en el interior de γ_R . Entonces, por el teorema del residuo,

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_0) &= \int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz} dz \\ &= \int_{-R}^R f(x)e^{iax} dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Observemos que la segunda condición del teorema implica que $|z^2 f(z)|$ está acotada por una constante $M > 0$ en todos los puntos del semiplano superior. Así,

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{M}{R} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \frac{M\pi}{R},$$

puesto que $e^{-aR \sin \theta} \leq 1$. Así, cuando $R \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_0), \quad a \geq 0, \quad (4.9)$$

Finalmente, basta tomar las partes real e imaginaria en ambos lados de (4.9) para obtener el resultado. \square

Ejemplo 4.42. Calcularemos

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

Consideremos la función racional $f(z) = 1/(z^2 + b^2)$, que satisface las condiciones del teorema. Notemos que los polos de $f(z)$ son $\pm bi$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \text{Re} \left(2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}, bi \right) \right) = \text{Re} \left(\frac{\pi}{b} e^{-ab} \right) = \frac{\pi}{b} e^{-ab}$$

Como $(\cos ax)/(x^2 + b^2)$ es una función par, se sigue que

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}.$$

Además, como $(\sin ax)/(x^2 + b^2)$ es una función impar, también se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + b^2} dx = 0$$

aunque no podremos asegurar nada de

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2 + b^2} dx.$$

4.8. Ejercicios

1. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$ converge para $|z| < 2$ y encuentra la suma.

2. Encuentra el radio de convergencia de las series

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\ b) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n. \end{array}$$

3. Demuestra la convergencia uniforme de las siguientes series para $|z| \leq 1$.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}.$$

4. Sea $0 < r < 1$. Muestra que

$$\begin{array}{l} a) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \\ b) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \end{array}$$

5. Desarrolla cada una de las funciones dadas en una serie de Taylor alrededor de z_0 . Indica el máximo disco donde será válida la representación.

$$a) f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = i. \quad b) f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = 1.$$

6. La *serie de Maclaurin* de una función f no es más que su serie de Taylor con centro en $z_0 = 0$. Determina las series de Maclaurin de las siguientes funciones, así como su radio de convergencia.

$$\begin{array}{lll} a) \sin z, & c) \sinh z, & e) \frac{1}{1-z^2}. \\ b) \cos z, & d) \cosh z, & \end{array}$$

7. Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en una vecindad de z_0 y que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, mientras que $g'(z_0) \neq 0$. Prueba el *teorema de L'Hôpital*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

8. Encuentra el desarrollo de la serie de Laurent de la función $(z^2 + z)^{-1}$ en las siguientes regiones

$$a) 0 < |z| < 1, \quad b) 0 < |z - 1| < 1, \quad c) 1 < |z - 1| < 2.$$

9. Calcula el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en la región dada.

a) $1/(z^2 - 1)^2$, en el anillo $0 < |z - 1| < 2$,

b) $1/(z^2 - 1)^2$, en el anillo $2 < |z - 1|$,

c) $\text{sen} \frac{1}{z(z-1)}$ en el anillo $0 < |z - 1| < 1$.

10. Evalúa la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^m \cos n\theta \, d\theta, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

comparando los coeficientes de la serie de Laurent de $(z + 1/z)^m$ con su desarrollo obtenido mediante la fórmula del binomio.

11. Muestra que una función que es meromorfa en el plano complejo extendido es racional.

12. Sea $f(z)$ una función entera tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Muestra que f debe tener al menos un cero.

13. Sea f una función entera, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ distintos y $R > \max\{|z_0|, |z_1|\}$. Prueba que

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)} \, dz = 2\pi i \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}.$$

14. Clasifica las singularidades y calcula los residuos en todos los polos de

$$f(z) = \frac{\text{sen}(\pi z)(e^{\pi z} - 1)}{z^3(z^2 + 1)(z^2 + 3z + 2)}.$$

15. Prueba que una función entera e inyectiva es un polinomio de grado 1.

16. Sean g y h analíticas en un punto z_0 , de modo que $g(z_0) \neq 0$ y h tiene un cero de orden 2 en z_0 . Demuestra que

$$\text{Res} \left(\frac{f}{g}, z_0 \right) = 2 \frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{g(z_0)h'''(z_0)}{(h''(z_0))^2}.$$

17. Encuentra los residuos de las siguientes funciones en los puntos dados.

$$a) \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen} z}, z_0 = 0.$$

$$c) \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2}, z_0 = 1.$$

$$b) \frac{1}{e^z - 1}, z_0 = 0.$$

$$d) \frac{z^2}{z^4 - 1}, z_0 = i.$$

18. Evalúa las siguientes integrales usando el teorema del residuo:

$$a) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(1-z)^3},$$

$$b) \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}.$$

19. Sea $f(z)$ analítica en $|z| \leq R$ con un único cero z_0 en el interior de este conjunto. Muestra que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k,$$

donde k es el orden de z_0 .

20. Evalúa las siguientes integrales:

$$a) \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1},$$

$$b) \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx,$$

$$c) \int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Bibliografía

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill, 1979.
- [2] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer, 1996.
- [3] W. R. Derrick, *Variable compleja con aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
- [4] H. D. Dixon, *A brief proof of Cauchy's integral theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 29, No. 5, 625-626, 1971,
- [5] J. D. Gray, S. A. Morris, *When is a Function that Satisfies the Cauchy-Riemann Equations Analytic?* The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 4., 246-256, 1978.
- [6] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*, AMS Chelsea Publishing, 1999.
- [7] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman, 1998.
- [8] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. J. Schiller, D. Spellman, *Variable Compleja*, McGraw-Hill, 1991.

