Topología diferencial

Oscar A. Palmas Velasco

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Versión preliminar – 2016

Presentación

Estas notas pretenden dar una introducción a las técnicas básicas de la topología diferencial. Parte de ellas surgieron de otros materiales elaborados con anterioridad, de los cuales destacamos los libros *Geometría diferencial* y *Geometría riemanniana*, escritos en colaboración con los profesores Guadalupe Reyes y Héctor Sánchez, respectivamente, así como unas notas para un curso en una Escuela de Matemáticas de América Latina y el Caribe (EMALCA) realizada en Tabasco, México, en 2010.

Es difícil que algún material escrito refleje de una manera dinámica el surgimiento y desarrollo de una disciplina a lo largo de los años. Al mismo tiempo, estas notas difícilmente reflejan la discusión de estos materiales con mis profesores, colegas y alumnos, a todos los cuales agradezco las horas que han pasado conmigo analizando una gran diversidad de aspectos, tanto globales como puntuales, de esta fascinante área de las matemáticas.

En concordancia con lo anterior, estas notas no pretenden ser una versión acabada ni mucho menos última de una particular visión de la topología diferencial. Simplemente diría que es una instantánea dada en una circunstancia particular. Es una invitación a acercarse a estos temas y por supuesto a este autor, quien desde ahora agradece todos los comentarios de sus lectores.

Oscar A. Palmas Velasco
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
oscar.palmas@ciencias.unam.mx

Índice general

Capítulo 1

Variedades diferenciables

Aquí definiremos los objetos fundamentales con los que trabajaremos; a saber, las variedades y los conceptos básicos asociados a éstas, como los espacios tangentes y los campos vectoriales.

1.1. Variedades diferenciables

Primero impondremos la condición de que estos objetos sean parecidos a algún $\mathbb{R}^n$, por lo menos desde el punto de vista topológico.

Definición 1.1. *Sea n un entero no negativo. Una* variedad topológica de dimensión n *es un espacio topológico de Hausdorff M con base numerable, tal que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad U de p en M y un homeomorfismo $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ de U sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. La pareja (U, φ) es una* carta de coordenadas de M *o, de manera breve, una carta de M.*

Decimos también que n es la dimensión *de M, escribiremos $n = \dim M$ y para una fácil referencia, escribiremos M^n. Cuando sea claro o innecesario referirse a la dimensión, simplemente escribiremos M.*

Observación 1.2. *Note que hemos incluido en la definición al caso $n = 0$. Aquí pensamos a $\mathbb{R}^0$ como un punto aislado $\{0\}$ con la topología trivial, de modo que una variedad topológica de dimensión 0 (y base numerable) será una colección a lo más numerable de puntos aislados. Por otro lado, será conveniente incluir al conjunto vacío $\varnothing$ también como variedad diferenciable.*

Puesto que cada carta $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, podemos reformular la definición de variedad en términos de las transformaciones inversas $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$, por lo general llamadas *parametrizaciones*. Dejaremos que el lector proporcione los detalles de esta reformulación en los casos que considere necesarios.

Observemos también que una variedad topológica hereda de manera automática las propiedades locales de la topología de $\mathbb{R}^n$; por ejemplo, la compacidad local y la conexidad local, entre otras.

Consideremos una pareja de cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) de una variedad M cuyos dominios se traslapen; es decir, tales que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. En este caso podemos construir las *transformaciones de cambio de coordenadas* $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, definidas en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $\varphi_i(U_1 \cap U_2)$. La idea general consiste en imponer una condición sobre estas transformaciones. En nuestro contexto, donde utilizaremos de manera fundamental el concepto de diferenciabilidad, es natural imponer una condición del tipo siguiente.

Definición 1.3. *Sean M una variedad topológica y $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) de M son C^r* compatibles *si y sólo si las transformaciones de cambio de coordenadas $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^r.*

Coleccionaremos ahora una familia de cartas compatibles que cubran a nuestra variedad.

Definición 1.4. *Sean M una variedad topológica y $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

- *Un* atlas *$\mathcal{A}$ de clase C^r en M es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M y tales que cualesquiera dos cartas en $\mathcal{A}$ son C^r compatibles.*
- *Una* estructura diferenciable de clase *C^r en M es un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^r en M que además es* maximal*, en el sentido de que si una carta (U, φ) es C^r compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.*

Observación 1.5. *Si $\mathcal{A}$ es un atlas de clase C^r en una variedad M, podemos agregarle todas las cartas (U, φ) que son C^r compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$ para obtener una estructura diferenciable de clase C^r en M.*

Definición 1.6. *Sean n un entero no negativo y $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Una* variedad diferenciable *de dimensión n y clase C^r es una pareja $(M, \mathcal{A})$, donde M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable de clase C^r en M.*

A partir de este momento sólo consideraremos variedades diferenciables de clase C^∞, que llamaremos variedades diferenciables o simplemente *variedades*. Además, cuando no sea necesario especificar la estructura diferenciable $\mathcal{A}$, sólo escribiremos M en vez de $(M, \mathcal{A})$.

Ejemplo 1.7. *Los siguientes son ejemplos de variedades:*

1. *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces U es una variedad diferenciable, con la estructura diferenciable determinada por la carta (U, I_U), donde I_U es la transformación identidad en U.*

2. *Más en general, si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y W es un subconjunto abierto de M, entonces $\mathcal{A}_W = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} | U \subset W\}$ define una estructura diferenciable para W.*

3. *Sea $\mathfrak{M}(m, n)$ el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas reales; si $m = n$, usaremos la notación más simple $\mathfrak{M}(n)$. La identificación evidente de $\mathfrak{M}(m, n)$ con $\mathbb{R}^{mn}$ determina una estructura diferenciable en $\mathfrak{M}(m, n)$.*

4. *Sean $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ y $\pi_\pm : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^n$ las proyecciones estereográficas desde los polos $p_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1)$. Entonces el atlas*

$$\{(\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p_+\}, \pi_+), (\mathbb{S}^n \smallsetminus \{p_-\}, \pi_-)\}$$

determina una estructura diferenciable en $\mathbb{S}^n$.

5. *Sean $(M_1^{n_1}, \mathcal{A}_1), (M_2^{n_2}, \mathcal{A}_2)$ variedades diferenciables. La colección de* cartas producto *$(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ con $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, determina una estructura diferenciable de dimensión $n_1 + n_2$ en el producto $M_1 \times M_2$.*

Como habíamos anticipado, el concepto de variedad está diseñado de modo que tenga sentido definir la diferenciabilidad de una transformación, de la manera siguiente.

Definición 1.8. *Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{B})$ variedades diferenciables.*

- *Una transformación continua $f : M \to N$ es* diferenciable *(de clase C^∞) en un punto $p \in M$ si y sólo si existen una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de una vecindad de p en M y una carta $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ de una vecindad de $f(p)$ en N tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable (de clase C^∞) en $\varphi(p)$.*

- *Una transformación $f : M \to N$ es* diferenciable *si y sólo si f es* diferenciable *en p para todo $p \in M$.*

Un caso particular de lo anterior ocurre cuando el contradominio de una transformación es el conjunto de los números reales. En este caso, se destaca este hecho hablando de una *función* más que de una transformación.

Definición 1.9. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *y* $(N, \mathcal{B})$ *variedades diferenciables. Denotaremos por* $C^\infty(M, N)$ *al conjunto de todas las transformaciones diferenciables de* M *en* N*. Cuando* $N = \mathbb{R}$*, es decir, cuando consideremos el conjunto de funciones reales definidas en* M*, denotaremos dicho conjunto por* $C^\infty(M)$*.*

Hay varias notaciones usuales para los conjuntos de transformaciones diferenciables. El propio autor utiliza más la notación $\mathfrak{F}(M)$ para el conjunto $C^\infty(M)$, pero en el contacto de la topología diferencial es más usual ésta última.

Ejemplo 1.10. *Consideremos la función* det $\in C^\infty(\mathfrak{M}(n))$*, que asocia a cada matriz cuadrada* $A \in \mathfrak{M}(n)$ *su determinante. Como el determinante de una matriz es una función polinomial de sus entradas, la función* det *es diferenciable. Observe que el grupo lineal de matrices invertibles* $GL(n)$ *con entradas reales es la imagen inversa de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *bajo esta función y por tanto es un abierto en esta variedad.*

1.2. El espacio tangente

Aunque ya disponemos del concepto de diferenciabilidad de una transformación entre variedades diferenciables, aún nos falta un detalle para poder aplicar las técnicas del cálculo diferencial a estos objetos. Queremos definir la *diferencial* de una transformación diferenciable, lo cual haremos en esta sección.

Un primer problema que debemos enfrentar es que la diferencial, si existe, es una transformación *lineal*. En particular, debe ser una transformación entre espacios vectoriales. Puesto que las variedades usualmente no tendrán esta característica, tenemos que definir primero tales espacios vectoriales, que serán los más parecidos a nuestras variedades. De hecho, el concepto que queremos establecer formalmente es el del espacio *tangente* a una variedad. Así, nuestro primer problema es:

> Dada una variedad M y un punto $p \in M$, ¿cómo definir el espacio tangente a M en el punto p, que denotaremos por T_pM?

En realidad, hay varias respuestas a esta cuestión. Una de ellas, tal vez la más intuitiva, parte desde un punto de vista muy geométrico.

En $\mathbb{R}^n$, un vector tangente se puede pensar como el vector "velocidad" de una curva. Podemos aprovechar esta idea para definir una relación entre dos curvas que pasan por un mismo punto: Diremos que tales curvas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo vector velocidad en el punto. Es claro que esto define una relación de equivalencia y que las clases de equivalencia definidas por esta relación pueden pensarse precisamente como los vectores velocidad.

En el espacio euclidiano, este procedimiento es ocioso. Sin embargo, la fuerza real de este punto de vista surge al trabajar con variedades abstractas.

Definición 1.11. *Sea M una variedad diferenciable y sean $\alpha_1, \alpha_2 \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dos curvas diferenciables en M (es decir, dos transformaciones diferenciables) tales que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$. Diremos que α_1 y α_2 son* equivalentes *si y sólo si para alguna carta (U, φ) de una vecindad de p se tiene que $(\varphi \circ \alpha_1)'(0) = (\varphi \circ \alpha_2)'(0)$.*

Intuitivamente, dos curvas son equivalentes si al "bajarlas" a $\mathbb{R}^n$ mediante una carta obtenemos curvas con el mismo vector tangente. Es fácil ver que este concepto no depende de la carta elegida y que en efecto define una relación de equivalencia entre curvas. Como es costumbre, denotamos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia de una curva $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ y la llamaremos el *vector tangente a α en p*. Podemos dar ya nuestra primera definición del espacio tangente a una variedad M en un punto p:

Definición 1.12. *El* espacio tangente *a una variedad M en el punto p es el conjunto de clases de equivalencia de curvas diferenciables*

$$T_pM = \{\, [\alpha] \mid \alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \,,\ \alpha(0) = p \,\}.$$

bajo la relación de equivalencia establecida en la definición 1.11.

Una de las ventajas de esta definición es su evidente sabor geométrico: Mantiene a los vectores "en la tierra" (o más precisamente, ligados a curvas en M). Esto permite, por ejemplo, dar una sencilla definición de la diferencial df_p de una transformación diferenciable $f \colon M \to N$ entre dos variedades en un punto $p \in M$, como sigue. Dado un vector $[\alpha]$ tangente a M en p, definido mediante una curva diferenciable $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, para hallar su imagen bajo la diferencial de f en p, podemos componer f con α. Esto nos da una curva en N. El vector tangente a $f \circ \alpha$ en $f(p)$ será la imagen de $[\alpha]$ bajo la diferencial de f; en símbolos, $df_p([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Sin embargo, la mala noticia con esta definición de T_pM es la dificultad para darle una estructura de espacio vectorial. Esto no es imposible, sino tortuoso: Por ejemplo, para definir la suma entre dos vectores $[\alpha]$ y $[\beta]$, consideramos las curvas correspondientes α y β, las "bajamos" a $\mathbb{R}^n$ por medio de una carta (U, φ). Para no complicarnos más la existencia, supongamos que $\varphi(p) = 0$, de modo que podamos sumar directamente $\varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta$. Esto nos da una curva en $\mathbb{R}^n$, que "subimos" a M por medio de la inversa de φ. Finalmente, decimos que la clase de equivalencia de esta última curva es la suma de $[\alpha]$ y $[\beta]$. Por si fuera poco, habría que mostrar que esta definición de la suma no depende de las curvas $[\alpha]$ y $[\beta]$ elegidas, así como de la carta φ. Sólo habrá que armarse de paciencia, pero realmente puede mostrarse este hecho.

De manera análoga, podemos definir la operación de producto por un escalar, para luego mostrar que estas dos operaciones hacen de T_pM un espacio vectorial.

Un segundo camino para definir el espacio tangente T_pM a una variedad, menos tortuoso pero un tanto abstracto, utiliza otra importante propiedad de los vectores tangentes. Para allanar el camino, haremos algunas simplificaciones y luego veremos que éstas no serán esenciales.

El lector habrá notado ya que una carta (U,φ) de una variedad diferenciable M nos permite pasar, al menos localmente, de la vecindad U de un punto p en M a una vecindad V del punto $\varphi(p)$ en $\mathbb{R}^n$. Como en ocasiones anteriores, supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\varphi(p)=0$.

Recordemos que dada una función diferenciable $g\in C^\infty(V)$ y un vector $v\in\mathbb{R}^n$ podemos calcular la *derivada direccional* de g en la dirección de v en el punto $0\in V$ como

$$v(g) := dg_0(v) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+hv)-g(0)}{h}.$$

Los resultados de la teoría del Cálculo establecen varias propiedades de esta derivada direccional. Como ejemplo tenemos:

1. Si 1 denota a la función constante igual a uno, entonces $v(1)=0$.

2. Linealidad: Si a_1,a_2 son dos números reales y $g_1,g_2\in C^\infty(V)$ son dos funciones diferenciables, entonces

$$v(a_1g_1+a_2g_2)=a_1v(g_1)+a_2v(g_2).$$

3. Regla del producto (o de Leibniz): Si $g_1,g_2\in C^\infty(V)$ son dos funciones diferenciables, entonces

$$v(g_1g_2)=g_1(0)v(g_2)+g_2(0)v(g_1).$$

Podemos entonces considerar a v como un operador sobre el conjunto $C^\infty(V)$ que satisface las tres propiedades anteriores. El punto de vista que nos será de enorme utilidad consiste en *definir a un vector tangente a* $\mathbb{R}^n$ *en* 0 *justo como un operador en* $C^\infty(V)$ *que satisfaga las tres condiciones anteriores.*

Una consecuencia inmediata de esta definición es que obtenemos sin mayor esfuerzo el hecho de que el conjunto de vectores tangentes a $\mathbb{R}^n$ en 0 tiene una estructura obvia de espacio vectorial: Si $a,b\in\mathbb{R}$ y v,w son dos vectores tangentes a $\mathbb{R}^n$ en 0, entonces es natural definir

$$(av+bw)(g)=av(g)+bw(g).$$

Todo parece funcionar de maravilla. ¿Qué podría salir mal al pasar al caso de las variedades? Si examinamos la situación anterior con más detalle, observaremos que hemos fijado un dominio común para nuestras funciones, a saber, el conjunto V. Esto hace que no nos preocupemos por cuestiones como los dominios de definición de la suma o del producto de dos funciones. Para imitar esta simplificación, podemos trabajar con funciones definidas en M, o en una vecindad fija U del punto p de nuestro interés. Así, definiríamos un vector tangente a M en p como un operador en $C^\infty(M)$ (o en $C^\infty(U)$) que satisface las tres propiedades que hemos venido recalcando. Es fácil, pero laborioso, mostrar que la elección de M o de U como dominio de nuestras funciones es completamente irrelevante; ver el ejercicio 5.

Es probable que algunos lectores ya se sientan cómodos con esta definición de vector tangente a M en p. Para aquellos que no, continuaremos la discusión.

Recordemos que la derivada direccional de una función no depende del comportamiento *global* de ésta, sino sólo del comportamiento *local*; es decir, de lo que ocurra en una vecindad del punto donde queremos calcular tal derivada. Esto permite extender la definición de la derivada direccional (y con ello de los vectores tangentes) a un conjunto de clases de equivalencia de funciones, definido bajo la siguiente relación de equivalencia.

Definición 1.13. *Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$, U_i vecindades de p en M y $f_i \in C^\infty(U_i)$, $i = 1, 2$. Decimos que f_1 y f_2 están relacionadas y escribimos $f_1 \sim_p f_2$ si y sólo si existe una vecindad de p tal que $U \subset U_1 \cap U_2$ y $f_1 \equiv f_2$ en U.*

Es fácil ver que $\sim_p$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones que están definidas en vecindades de p. Una clase de equivalencia bajo esta relación se denota $[f]_p$ y se llama el *germen de la función f* en p. Sea G_pM el conjunto de estos gérmenes.

Notemos que para cada germen podemos definir $[f]_p(p) = f(p)$ sin ambigüedad. En G_pM definimos las operaciones

- $[f_1]_p + [f_2]_p = [f_1 + f_2]_p$,
- $a[f]_p = [af]_p$, $a \in \mathbb{R}$,
- $[f_1]_p[f_2]_p = [f_1 f_2]_p$.

Finalmente podemos establecer la definición formal de los vectores tangentes usando este enfoque.

Definición 1.14. *Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un* vector tangente *a M en p es un operador lineal $v: G_pM \to \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz*

$$v([f_1 f_2]_p) = f_1(p)v([f_2]_p) + f_2(p)v([f_1]_p).$$

El espacio tangente a M en p *es el conjunto T_pM de vectores tangentes a M en p; este conjunto tiene una estructura de espacio vectorial dada por*

$$(av + bw)([f]_p) = av([f]_p) + bw([f]_p),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_pM$ y $[f]_p \in G_pM$.

Veamos que si $[c]_p$ denota el germen en p de una función constante, entonces $v([c]_p) = 0$ para cada $v \in T_pM$. Por linealidad, basta ver qué ocurre con $[1]_p$. Como $[1]_p = [1]_p[1]_p$, tenemos

$$v([1]_p) = 1 \cdot v([1]_p) + 1 \cdot v([1]_p) = 2 \cdot v([1]_p)$$

y así, $v([1]_p) = 0$.

Utilizaremos esta definición del espacio tangente de manera regular, pero daremos la idea acerca de la relación existente entre esta definición y la relativa al conjunto de clases de equivalencia de curvas. Observemos que si α es una curva en M con $\alpha(0) = p$, entonces podemos definir un operador v_α como

$$v_\alpha([f]_p) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Se puede ver que esta definición no depende de la función f elegida en el germen $[f]_p$ y que en efecto es un operador que satisface la definición 1.14. Además, puede mostrarse que si dos curvas son equivalentes (definición 1.11), entonces los operadores asociados a estas curvas coinciden. Esto establece una transformación entre el conjunto de clases de equivalencia de curvas (definición 1.12) y el espacio vectorial de "derivadas direccionales" (definición 1.14).

No continuaremos con los detalles de esta construcción, pero puede mostrarse que esta transformación es en realidad una biyección entre ambos conjuntos, de modo que podemos aprovecharla en dos sentidos: Uno, para dar estructura de espacio vectorial al conjunto de clases de equivalencia de curvas; el segundo, para dar una interpretación geométrica al espacio de derivadas direccionales. En más de una ocasión será útil aprovechar este carácter complementario de ambos enfoques.

Ya que T_pM tiene estructura de espacio vectorial, tiene sentido preguntarse acerca de su dimensión. Consideremos una carta (U, φ) con $p \in U$ y $\varphi(p) = 0$. Además, sean x_i las funciones de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^n$. Escribimos $u_i = x_i \circ \varphi$ y definimos

$$\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p : G_pM \to \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p ([f]_p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0),$$

donde $\partial / \partial x_i$ denota la derivada parcial de una función con respecto de la i–ésima variable en $\mathbb{R}^n$. Probaremos que

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p \right\}$$

es una base de T_pM. Para ello, necesitamos un resultado auxiliar.

Lema 1.15. *Sean $V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, con $0 \in V$ y $g \in C^\infty(V)$. Entonces existen $h_1, \dots, h_n \in C^\infty(V)$ tales que*

$$g(x) = g(0) + \sum_{i=1}^n x_i\, h_i(x), \quad \text{con } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ y } h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0).$$

Demostración. Sea $x \in V$ y definamos $G(t) = g(tx)$; entonces

$$g(x) - g(0) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx)dt.$$

Definiendo

$$h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx)dt,$$

obtenemos el lema. □

Proposición 1.16. *Sean M^n una variedad diferenciable, $p \in M$, (U, φ) una carta con $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ y $u_i = x_i \circ \varphi$ como antes. Entonces*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \tag{1.1}$$

para todo $v \in T_pM$.

Demostración. Sean $f \in C^\infty(U)$ y $g = f \circ \varphi^{-1}$. Restringiendo a dominios adecuados en caso necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V = \varphi(U)$ es una vecindad convexa de 0 en $\mathbb{R}^n$. Por el lema 1.15 tenemos que

$$g(x) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, h_i(x), \quad \text{con } h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0).$$

En la ecuación anterior hemos abreviado la notación por conveniencia, pero no debemos olvidar que el término x_i en la suma representa a la i-ésima función coordenada, evaluada en el punto x. Ahora, si $x = \varphi(q)$, podemos escribir esto como

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} u_i\,(h_i \circ \varphi)(q), \quad \text{con } (h_i \circ \varphi)(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0).$$

Usando $v([f(p)]_p) = 0$, la regla de Leibniz y $u_i(p) = x_i(\varphi(p)) = x_i(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} v([f]_p) &= \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p)(h_i \circ \varphi)(p) + \sum_{i=1}^{n} u_i(p) v([h_i \circ \varphi]_p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p ([f]_p). \end{aligned}$$

Como esto vale para cada función f, tenemos el resultado deseado. □

La expresión (1.1) muestra que los vectores $\partial/\partial u_i|_p$ generan a T_pM. Pero es fácil mostrar que estos vectores son linealmente independientes; ver el ejercicio 6.

Corolario 1.17. *Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Entonces T_pM es un espacio vectorial de la misma dimensión que M.*

Aprovecharemos la proposición 1.16 y su corolario para presentar un ejemplo importante de variedad diferenciable.

Definición 1.18. *Dada una variedad diferenciable M, el* haz tangente *a M es el conjunto*

$$TM = \{(p,v) \mid p \in M, v \in T_pM\}\,.$$

Proposición 1.19. *El haz tangente TM de una variedad diferenciable es a su vez una variedad diferenciable y* $\dim(TM) = 2\dim M$*.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{A}$ la estructura diferenciable de la variedad M. Si $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, denotamos

$$TU = \{(p,v) \mid p \in U, v \in T_pM\ \}\,.$$

Sean $n = \dim M$, x_i las funciones coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $u_i = x_i \circ \varphi$ como en la proposición 1.16. Entonces, para cada $(p,v) \in TU$ se cumple la ecuación (1.1), a saber,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p)\, \frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_p\,.$$

De este modo, podemos definir la transformación $\widetilde{\varphi}\colon TU \to U \times \mathbb{R}^n$ como

$$\widetilde{\varphi}(p,v) = \left(\varphi(p), \sum_{i=1}^{n} v([u_i]_p) e_i\right),$$

donde $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dejamos como ejercicio para el lector mostrar que la familia $\{\,(TU,\widetilde{\varphi}) \mid (U,\varphi) \in \mathcal{A}\,\}$ define una estructura diferenciable de dimensión $2n$ para TM. □

Finalmente podemos usar nuestra caracterización del espacio tangente para definir la diferencial de una transformación entre variedades.

Definición 1.20. *Sean M, N variedades diferenciables, $f\colon M \to N$ una transformación diferenciable y $p \in M$. Definimos la* diferencial $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ *de f en un punto $p \in M$ como*

$$df_p(v)([h]_{f(p)}) = v([h \circ f]_p),$$

donde $v \in T_pM$ y $[h]_{f(p)} \in G_{f(p)}N$.

Ejemplo 1.21. *Sea* $\mathrm{Sim}(n)$ *el subespacio vectorial de $\mathfrak{M}(n)$ formado por las matrices simétricas, es decir,*

$$\mathrm{Sim}(n) = \{C \in \mathfrak{M}(n) \mid C^T = C\}.$$

Como vimos en el ejemplo 1.7, la estructura de espacio vectorial induce una estructura diferenciable en $\mathfrak{M}(n)$. De manera similar, $\mathrm{Sim}(n) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ *tiene una estructura diferenciable. Dadas estas estructuras diferenciables, es fácil ver que la* *transformación* $f\colon \mathfrak{M}(n) \to \mathrm{Sim}(n)$ *dada como* $f(A) = AA^T$ *es diferenciable, de modo que procederemos a calcular su diferencial* df_A*.*

En este caso, la estructura de espacio vectorial en el dominio y el contradominio de f *nos permite calcular la diferencial de la manera "usual"; es decir,* df_A *se puede pensar como una transformación de* $\mathfrak{M}(n)$ *en* $\mathrm{Sim}(n)$ *y si* $B \in \mathfrak{M}(n)$*, entonces*

$$df_A(B) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left((A+sB)(A+sB)^T - AA^T\right) = AB^T + BA^T.$$

En particular, observemos que $df_I(B) = B^T + B$*.*

Proposición 1.22. *Sean* M, N, P *variedades diferenciables,* $f\colon M \to N$*,* $g\colon N \to P$ *transformaciones diferenciables y* $p \in M$*.*

1. *Para cada* $p \in M$*,* df_p *es una transformación lineal.*
2. *Si* f *es constante, entonces* $df_p = 0$ *para cada* $p \in M$*.*
3. *Regla de la cadena:* $d(g\circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$*.*
4. *Sean* (U,φ) *una carta de una vecindad de* p *con* $\varphi(p) = 0$*,* x_i *las funciones coordenadas de* $\mathbb{R}^n$*,* $u_i = x_i \circ \varphi$ *y* $\{e_i\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

   $$d\varphi_0^{-1}(e_i) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p;$$

   como consecuencia, $T_pM = d\varphi_0^{-1}(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Dejaremos la demostración de los tres primeros puntos como ejercicio para el lector. En cuanto al último inciso, sea $[h]_p \in G_pM$; entonces

$$d\varphi_0^{-1}(e_i)([h]_p) = e_i([h\circ\varphi^{-1}]_0) = \frac{\partial(h\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p([h]_p). \qquad \square$$

Observación 1.23. *Ya hemos dicho que usaremos la notación* df_p *para referirnos a la diferencial de una transformación. Usaremos* Df_p *para denotar a la* derivada *de* f *en* p*, es decir, a la matriz que representa a* df_p *con respecto de bases dadas en el dominio y el contradominio.*

Observación 1.24. *Sean* M^n, N^m *variedades diferenciables,* $f\colon M \to N$ *una transformación diferenciable entre ellas,* $p \in M$ *y* (U,φ)*,* (V,ψ) *cartas con* $p \in U$*,* $q = f(p) \in V$

y $\varphi(p) = 0$. Si $x_1, \dots, x_n$ son las funciones coordenadas en $\mathbb{R}^n$, con $u_i = x_i \circ \varphi$ y, por otro lado, $y_1, \dots, y_m$ son las funciones coordenadas en $\mathbb{R}^m$ y $v_j = y_j \circ \psi$, entonces

$$\begin{aligned} df_p\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_p \right)([v_j]_q) &= \frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_p ([v_j \circ f]_p) = \frac{\partial (v_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \\ &= \frac{\partial (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(0), \end{aligned}$$

donde $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_j$ denota la j-ésima coordenada de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Por la proposición 1.16,

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_p \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(0) \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\bigg|_q \right).$$

Es decir, la matriz de df_p con respecto de las bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial v_1}\bigg|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial v_m}\bigg|_q \right\}$$

es precisamente la matriz derivada de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ evaluada en 0.

Observación 1.25. *El concepto de haz tangente nos permite coleccionar en un todo al conjunto de diferenciales df_p de una transformación diferenciable $f\colon M \to N$. En efecto, podemos definir $df\colon TM \to TN$ como*

$$df(p, v) := (f(p), df_p(v)), \text{ donde } v \in T_pM.$$

1.3. Teorema del rango

Ahora disponemos de más herramientas para trabajar con las variedades y podemos extender con facilidad algunos resultados clásicos del Cálculo. El primer resultado que extenderemos a las variedades es el siguiente.

Teorema 1.26 (de la función inversa)**.** *Sea $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable tal que $g(0) = 0$ y la diferencial de g en 0 es invertible. Entonces existe una vecindad V de 0 en $\mathbb{R}^n$ tal que $g(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, $g|_V\colon V \to g(V)$ es invertible y la función inversa $g^{-1}\colon g(V) \to V$ es diferenciable.*

Observación 1.27. *Hay otras versiones del teorema de la función inversa; por ejemplo, para transformaciones de clase C^r, pero recordemos que aquí sólo estudiaremos el caso C^∞.*

Las transformaciones que satisfacen la conclusión del teorema reciben un nombre especial.

Definición 1.28. *Una transformación diferenciable* $f: M \to N$ *entre variedades diferenciables es un* difeomorfismo *si y sólo si* f *es biyectiva y tanto* f *como su inversa* f^{-1} *son diferenciables.*

Por otro lado, una transformación $f: M \to N$ *es un* difeomorfismo local en p *si y sólo si existe una vecindad* U *de* p *en* M *tal que* $f|_U: U \to f(U)$ *es un difeomorfismo.*

Observe que cuando existe tal difeomorfismo, necesariamente las variedades deben tener la misma dimensión. Enunciemos ahora la nueva versión del teorema anterior.

Teorema 1.29 (de la función inversa para variedades)**.** *Sean* M *y* N *variedades de la misma dimensión,* $f: M \to N$ *una transformación diferenciable y y* p *un punto en* M *tal que la diferencial de* f *en* p *es invertible. Entonces* f *es un difeomorfismo local en* p.

Demostración. Sean $n = \dim M = \dim N$ y (U, φ) una carta de M, donde U es una vecindad de p y $\varphi(p) = 0$. En forma análoga, sea (V, ψ) una carta de N, donde V es una vecindad de $f(p)$. Entonces la transformación $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface las hipótesis del teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$, por lo que resulta ser un difeomorfismo local en 0. De aquí es fácil ver que $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ es un difeomorfismo local en p. $\square$

Continuemos usando la notación de la demostración anterior. Podemos pensar al difeomorfismo g como un "cambio de coordenadas" entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y parametrizar la vecindad V de $f(p)$ en N mediante la carta $(U, g^{-1} \circ \psi)$. La expresión de f con respecto de (U, ϕ) y esta carta (es decir, la transformación $g^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$) es la identidad, de modo que podemos parafrasear una vez más el teorema, como sigue.

Teorema 1.30. *Sean* M, N *variedades diferenciables con la misma dimensión,* $f: M \to N$ *una transformación diferenciable y* p *un punto en* M *tal que la diferencial de* f *en* p *es invertible. Entonces existen cartas* φ *de una vecindad de* p *en* M *y* ψ *de una vecindad de* $f(p)$ *en* N *tales que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *es la identidad.*

Extenderemos esta versión del teorema de la función inversa en varios sentidos: Consideraremos una transformación entre variedades de dimensiones arbitrarias M^n y N^m, así como transformaciones no necesariamente invertibles. Más adelante destacaremos las particularidades de los casos $n \leq m$ y $n \geq m$.

Definición 1.31. *Sean* M, N *variedades diferenciables,* $f: M \to N$ *una transformación diferenciable y* $p \in M$. *El* rango *de* f *en* p *es el rango de la diferencial de* f *en* p*; es decir, es igual a* $\dim df_p(T_pM)$.

Teorema 1.32 (del rango). *Sean M^n, N^m variedades diferenciables y $f: M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas.*

1. *Supongamos que el rango de f en p es k. Entonces existen cartas (U, φ) y (V, ψ) con $\varphi(p) = 0$, $\psi(f(p)) = 0$ tales que*
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_m(t)).$$
2. *Si el rango de f es constante e igual a k en todos los puntos de una vecindad de p, entonces existen cartas (U, φ) y (V, ψ) con $\varphi(p) = 0$, $\psi(f(p)) = 0$ tales que*
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0).$$

Demostración. Como el resultado es local podemos suponer que M es una vecindad del origen en $\mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^m$ y $f(0) = 0$. La hipótesis es que la matriz Df_0 tiene rango k. Permutando las coordenadas podemos suponer que

$$Df_x = \begin{bmatrix} A(x) & :: \\ :: & :: \end{bmatrix}, \quad \text{con } \det A(0) \neq 0,$$

donde $A(x)$ es una matriz $k \times k$ y los elementos indicados con $::$ no son relevantes. Por continuidad, en una vecindad del origen tenemos $\det A(x) \neq 0$. Ahora definimos $\varphi: M \to \mathbb{R}^n$ por
$$\varphi(s_1, \dots, s_n) = (f_1(s), \dots, f_k(s), s_{k+1}, \dots, s_n).$$
Observemos que
$$D\varphi_0 = \begin{bmatrix} A(0) & :: \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$
Así, $\det D\varphi_0 \neq 0$ y por el teorema de la función inversa existe una vecindad W del origen tal que $\varphi: W \to \varphi(W)$ es un difeomorfismo. Como $f_i \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = t_i$ para $i = 1, \dots, k$, tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_m(t)),$$

lo cual muestra la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte del teorema usaremos la última expresión obtenida. Si $g = f \circ \varphi^{-1}$, entonces

$$Dg_t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ :: & \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial t_j}\right)_{i,j>k} \end{bmatrix}.$$

Supongamos que rango $Df_x = k$ para toda x en una vecindad del origen. Entonces rango Dg_t es igual a k en una vecindad del origen y

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_j} = 0 \text{ para } i, j > k.$$

Así, $g_i(t) = g_i(t_1, \dots, t_k)$ para $i > k$. Sea

$$\psi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} - g_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_m - g_m(y_1, \dots, y_k));$$

entonces

$$D\psi_y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \because & I \end{bmatrix};$$

por el teorema de la función inversa, ψ es un difeomorfismo local. Finalmente,

$$\psi \circ g(t_1, \dots, t_n) = \psi(t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_m(t)) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0). \qquad \square$$

En el siguiente capítulo estudiaremos algunas consecuencias de este resultado.

1.4. Variedades con frontera

El lector podrá observar que hasta ahora hemos modelado las variedades mediante conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, puesto que más adelante necesitaremos trabajar con las llamadas variedades con frontera, aprovecharemos esta sección para definirlas. Para ello, primero necesitamos introducir el concepto de transformación diferenciable en un subconjunto arbitrario de una variedad; el caso particular que aparece en la siguiente definición bastará para nuestros propósitos.

Definición 1.33. *Sean A un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y $g: A \to \mathbb{R}^m$. Decimos que g es* diferenciable *en A si y sólo si existe una* extensión diferenciable *de g a una vecindad V de A en $\mathbb{R}^n$; es decir, una transformación diferenciable $G: V \to \mathbb{R}^m$ tal que $G|_A = g$.*

Como ya es costumbre, denotaremos por $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ al conjunto de todas las transformaciones diferenciables en este sentido y si $m = 1$ usaremos la notación $C^\infty(A)$.

Nuestro modelo de variedad con frontera será el semiespacio superior de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \},$$

dotado de la topología inducida por $\mathbb{R}^n$. Definimos la *frontera de* $\mathbb{R}^n_+$ como

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0 \,\}.$$

Ahora es fácil dar la definición de variedad con frontera.

Definición 1.34. *Sean M un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$.*

- *La pareja (U, φ) es una* carta de variedad (topológica) con frontera *en M si φ es un homeomorfismo de un conjunto abierto $U \subset M$ en un abierto de $\mathbb{R}^n_+$.*

- *Dos cartas de variedad con frontera (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) son* compatibles *si tanto $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R}^n_+$ como $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R}^n_+$ son diferenciables en el sentido de la definición 1.33.*

- *Un* atlas *$\mathcal{A}$ de variedad diferenciable con frontera es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M y cualesquiera dos de ellas son compatibles. El atlas es* maximal *si cualquier carta (U, φ) que es compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$ cumple que $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.*

- *Una* variedad diferenciable con frontera *es un espacio de Hausdorff M con base numerable junto con un atlas maximal $\mathcal{A}$ de variedad diferenciable con frontera. En este caso, diremos más brevemente que M es una variedad con frontera.*

- *Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad con frontera. Si $p \in M$ satisface que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{R}^n_+$ para alguna carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, decimos que p es un* punto frontera.

- *La* frontera *de M es el conjunto ∂M de los puntos frontera. El* interior $\operatorname{Int} M$ *de M es el conjunto $M \setminus \partial M$.*

En algunos casos será importante hacer la distinción entre las variedades que habíamos considerando antes y las variedades con frontera recién definidas; con este fin, usaremos el término variedades sin frontera para referirmos a las primeras.

Observación 1.35. *La condición de ser un punto frontera no depende de la carta. En efecto, supongamos que existen cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) tales que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, $\varphi_1(p) \in \partial\mathbb{R}^n_+$ (digamos, $\varphi_1(p) = 0$) y $x = \varphi_2(p) \notin \partial\mathbb{R}^n_+$. Entonces la transformación $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sería un homeomorfismo, pero ninguna vecindad de 0 en $\mathbb{R}^n_+$ puede ser homeomorfa a una pequeña vecindad de x en $\mathbb{R}^n_+$ dada por un abierto usual en $\mathbb{R}^n$.*

Por la observación anterior, el interior de M es el conjunto de puntos para los cuales existe una carta (U,φ) donde $\varphi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, el interior de M es una variedad sin frontera de dimensión n. La siguiente proposición dice que también la frontera de M es una variedad.

Proposición 1.36. *Sea M^n una variedad con frontera. Si $\partial M \neq \varnothing$, entonces ∂M es una variedad sin frontera de dimensión $n-1$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de cartas (U,φ) de M tales que $U \cap \partial M \neq \varnothing$. Sea $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección sobre las primeras $n-1$ coordenadas. Entonces

$$\{\, (U \cap \partial M, \pi \circ \varphi|_{U \cap \partial M}) \,|\, (U,\varphi) \in \mathcal{B} \,\}$$

es un atlas para ∂M. □

A continuación damos un ejemplo importante de variedad con frontera.

Proposición 1.37. *Sean M_1 una variedad con frontera y M_2 una variedad sin frontera. Entonces $M_1 \times M_2$ es una variedad con frontera y*

$$\partial(M_1 \times M_2) = \partial M_1 \times M_2.$$

Un caso particular de este resultado que usaremos con frecuencia es el siguiente.

Corolario 1.38. *Sea M una variedad sin frontera. Entonces el producto $[0,1] \times M$ del intervalo cerrado $[0,1]$ con M es una variedad con frontera, y*

$$\partial([0,1] \times M) = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M).$$

Así pues, la frontera de $[0,1] \times M$ está formada por dos copias de M.

Los conceptos y resultados básicos dados antes para variedades sin frontera se pueden extender al caso de las variedades con frontera, con pocas o ninguna modificación; por ejemplo, la definición de una transformación diferenciable $f\colon M \to N$ cuyo dominio es una variedad con frontera es idéntica a la definición 1.8. Por supuesto indicaremos las modificaciones en caso necesario.

Ejercicios

1. Complete los detalles de los incisos (4) y (5) del ejemplo 1.7.

2. Defina el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ de dimensión n como el espacio que se obtiene al identificar los puntos antípodas de la esfera $\mathbb{S}^n$ y muestre que $\mathbb{P}^n$ admite una estructura diferenciable.

3. Considere las cartas globales de la recta real dadas por $(\mathbb{R}, \text{identidad})$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$, donde $\varphi(x) = x^3$. Muestre que estas cartas no son compatibles y por tanto definen estructuras diferenciables distintas. Sin embargo, muestre que la transformación $f : (\mathbb{R}, \varphi) \to (\mathbb{R}, \text{identidad})$ dada por $f(x) = x^3$ es un difeomorfismo.

4. Sea M una variedad diferenciable. Demuestre que el espacio tangente a la diagonal $\Delta = \{(p,p),\ p \in M\} \subset M \times M$ en un punto (p,p) es la diagonal de $T_pM \times T_pM$.

5. Para demostrar la afirmación de la página 7 y ver que podemos pensar un vector tangente como un operador sobre $C^\infty(M)$ o sobre $C^\infty(U)$, muestre que para cualquier función $f \in C^\infty(U)$ existe una función $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ que coincide con f en una vecindad de p. *Sugerencia*: Analice primero el caso en que $n = 1$ y el punto en cuestión es el origen. Muestre que existe una función en $C^\infty(\mathbb{R})$ que vale 1 en un intervalo $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$ y vale 0 fuera de un intervalo que contiene al anterior, digamos $(-\epsilon_2, \epsilon_2)$ con $\epsilon_1 < \epsilon_2$; use esta función para definir $\tilde{f}$. Luego analice el caso cuando la variedad es $\mathbb{R}^n$. Use cartas para el caso general.

6. Muestre la afirmación de la página 10, en el sentido de que los vectores tangentes $\partial/\partial u_i|_p$, $i = 1, \ldots, n$, son linealmente independientes. *Sugerencia*: Considere una combinación lineal de ellos
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = 0$$
y aplíquela a los gérmenes de las funciones coordenadas $[u_j]_p$.

7. Complete la demostración de la Proposición 1.19, mostrando que la familia $\{(TU, \widetilde{\varphi}) \,|\, (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ define una estructura diferenciable de dimensión $2n$ para TM.

8. Demuestre los incisos pendientes de la Proposición 1.22.

9. Sea $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable de una variedad compacta M en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que f no puede tener rango n en todo M.

10. Demuestre la Proposición 1.37.

11. La definición del espacio tangente T_pM en un punto frontera $p \in M$ es directa, pero verifique que $\dim T_pM = \dim M$ y que T_pM contiene a $T_p\partial M$ como un subespacio vectorial de dimensión $\dim M - 1$.

Capítulo 2

Subvariedades diferenciables

Ahora veremos algunas consecuencias del teorema del rango (teorema 1.32). En particular, lo usaremos para decidir bajo qué condiciones un subconjunto de una variedad puede ser considerado a su vez como una variedad. A la par con esta discusión presentaremos algunos resultados importantes en la topología diferencial, como el Lema de Sard y el Teorema de Whitney, entre otros. Presentaremos también el concepto de transversalidad, que será de gran utilidad de aquí en adelante.

2.1. Subvariedades y valores regulares

En esta sección nos interesa establecer condiciones suficientes bajo las cuales la imagen inversa de un conjunto bajo una transformación diferenciable cumpla con la definición de variedad. Como ejemplo, pensemos en la función (diferenciable)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Para cada $r > 0$ tenemos que la imagen inversa $f^{-1}(r)$ es una esfera, que es una variedad diferenciable. Queremos ver qué ocurre en general con una transformación entre variedades diferenciables arbitrarias, para lo cual presentamos primero el concepto de subvariedad.

Sea M una variedad diferenciable. Intuitivamente, una *subvariedad (diferenciable)* de M será un subconjunto $P \subset M$ tal que es una variedad diferenciable, con la topología inducida por la topología de M. Así, cada punto $p \in P$ debe contar con dos cartas, una por ser un punto de la variedad M y otra por pertenecer a P. La compatibilidad de las topologías queda garantizada pidiendo una relación natural entre ambas cartas, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea M^n una variedad diferenciable. Un subconjunto $P \subset M$ es una subvariedad diferenciable de M (de dimensión $k \leq n$) si para cada punto $p \in P$ existe una carta (U, φ) de una vecindad de p en M de modo que*

$$P \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^k).$$

En otras palabras, puesto que $\{0\} \times \mathbb{R}^k$ es esencialmente igual a $\mathbb{R}^k$, tenemos que la restricción de φ a $P \cap U$ es una carta de P, de dimensión k.

Antes de presentar el resultado principal de esta sección, daremos algunas definiciones más.

Definición 2.2. *Sean M^n, N^m variedades diferenciables, $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas, $p \in M$ y $q \in N$. Decimos que*

- *$p \in M$ es un* punto regular *de f si df_p tiene rango m. En otras palabras, df_p es suprayectiva. También se dice que f es una* sumersión en *p.*
- *f es una* sumersión *si f es una sumersión en p para todo $p \in M$.*
- *$q \in N$ es un* valor regular *de f si cada $p \in f^{-1}(q)$ es un punto regular.*

Proposición 2.3. *Sean M^n, N^m variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. Sea $q \in N$ un valor regular de f, con $f^{-1}(q) \neq \varnothing$. Entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M, de dimensión $n - m$.*

Demostración. Observemos que la condición de que q sea un valor regular de f implica directamente que $n \geq m$. Si $p \in f^{-1}(q)$, el teorema 1.32 implica que existen cartas (U, φ) de una vecindad de p y (V, ψ) de una vecindad de q tales que $\varphi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$ y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_m).$$

(Note que no hay que agregar ceros al final.) Sea $p' \in U$; entonces $f(p') = q$ si y sólo si

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p')) = 0 \quad \text{o bien} \quad \varphi(p') = (0, \ldots, 0, t_{m+1}, \ldots, t_n).$$

Así, $f^{-1}(q) \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m})$, de modo que la restricción de φ a $f^{-1}(q) \cap U$ nos da una carta local adecuada. Como podemos hacer esto para cada $p \in f^{-1}(q)$, tenemos que $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M de dimensión $n - m$. □

Adicionalmente, tenemos el siguiente útil hecho.

Proposición 2.4. *Sean M, N variedades diferenciables y $q \in N$ un valor regular de una transformación diferenciable $f : M \to N$. Para cada $p \in f^{-1}(q)$ se tiene que $T_p f^{-1}(q) = \text{Núcleo}(df_p)$.*

Demostración. Sea (U, φ) una carta de una vecindad de p en $f^{-1}(q)$, con $\varphi(p) = 0$. Entonces $f \circ \varphi^{-1}$ es constante y

$$df_p(T_p f^{-1}(q)) = d(f \circ \varphi^{-1})_0(\mathbb{R}^{n-m}) = \{0\}.$$

Es decir, $T_p f^{-1}(q) \subset \text{Núcleo}(df_p)$. Para mostrar la otra contención, usaremos un argumento dimensional. Como df_p es suprayectiva, tenemos que

$$\dim T_p f^{-1}(q) = n - m = \dim \text{Núcleo}(df_p),$$

y obtenemos la contención en el otro sentido. □

Ejemplo 2.5. *Sean* $\mathfrak{M}(n)$ *y* $\text{Sim}(n)$ *los espacios de matrices analizados anteriormente en los ejemplos 1.7 y 1.21 y* $f : \mathfrak{M}(n) \to \text{Sim}(n)$ *la transformación* $f(A) = AA^T$. *Mostraremos que el* grupo ortogonal $O(n) = f^{-1}(I)$ *es una variedad de dimensión* $n(n-1)/2$, *viendo que* I *es un valor regular de* f*; es decir, que* df_A *es suprayectiva para cada* $A \in O(n)$, *o bien que para cada* $C \in \text{Sim}(n)$ *existe* B *tal que* $df_A(B) = C$. *Como vimos en el ejemplo 1.21,*

$$df_A(B) = AB^T + BA^T,$$

de modo que tomando $B = \frac{1}{2}CA$ *tenemos que*

$$df_A(B) = \frac{1}{2}(AA^TC^T + CAA^T) = \frac{1}{2}(C^T + C) = C.$$

Así, df_A *es suprayectiva e* I *es un valor regular de* f. *Adicionalmente, podemos aplicar la proposición 2.4, de modo que el espacio tangente a* $O(n)$ *en la identidad es*

$$T_I O(n) = \text{Núcleo}(df_I) = \{B \in M(n) \mid B^T + B = 0\};$$

es decir, el conjunto de matrices antisimétricas. □

Uno podría preguntarse si el recíproco de la proposición 2.3 es cierto; es decir, si una subvariedad siempre puede verse como la imagen inversa de un valor regular de una transformación. Como veremos un poco más adelante, esta afirmación no es cierta en general, pero só lo es el siguiente recíproco parcial.

Proposición 2.6. *Sea* M^n *una variedad diferenciable,* $P^k \subset M^n$ *una subvariedad diferenciable de* M *y* $p \in P$. *Entonces existe una vecindad* U *de* p *en* M *y una transformación* f *de* U *en algún espacio euclidiano tal que* $P \cap U$ *es la imagen inversa de un valor regular de* f.

Demostración. Puesto que P es una subvariedad de M, existe una carta (U, φ) de una vecindad de p en M tal que $P \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^k)$. Si definimos la proyección

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}, \qquad \pi(x_1, \ldots, x_{n-k}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-k}),$$

tenemos que $\{0\} \times \mathbb{R}^k = \pi^{-1}(0)$ y que $P \cap U = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(0)) = (\pi \circ \varphi)^{-1}(0)$. Finalmente, es fácil ver que 0 es un valor regular de $\pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$; basta recordar que φ es un difeomorfismo local y notar que π es una sumersión. $\square$

2.2. Transversalidad

En la sección anterior analizamos cuándo la imagen inversa de un valor de una transformación $f : M \to N$ resulta ser una subvariedad de M y vimos que esto último ocurre si el valor q es regular. Si pensamos a q como una subvariedad de N (de dimensión cero), entonces podemos pasar a analizar el siguiente problema más general: Si $Q \subset N$ es una subvariedad de N, ¿bajo qué condiciones ocurre que $f^{-1}(Q)$ es una subvariedad de M?

La respuesta a esta pregunta nos conducirá al concepto de transversalidad. Observemos, en primer lugar, que si Q^k es una subvariedad de N^m y $q \in Q$, por la proposición 2.6 existe una vecindad V de q en N y una transformación $g : V \to \mathbb{R}^{m-k}$ tal que $Q \cap V = g^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de g. Si nos fijamos ahora en $f^{-1}(Q \cap V) = f^{-1}g^{-1}(0) = (g \circ f)^{-1}(0)$, bastará que 0 sea un valor regular de $g \circ f$ para que $f^{-1}(Q \cap V) = f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(V)$ sea una subvariedad de M.

Consideremos ahora un punto p tal que $f(p) = q \in Q$. Como $d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$ y dg_q es suprayectiva, necesitamos imponer cierto comportamiento a la diferencial de f. La siguiente definición mostrará su utilidad en breve.

Definición 2.7. *Sean M, N variedades diferenciables, $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas y Q una subvariedad diferenciable de N. Decimos que f* es transversal a *Q y escribimos $f \pitchfork Q$ si y sólo si para cada $p \in f^{-1}(Q)$ se tiene que*

$$df_p(T_pM) + T_{f(p)}Q = T_{f(p)}N. \tag{2.1}$$

Observemos que si Q consta de un solo punto $q \in N$, entonces $df_p(T_pM) = T_qN$ y df_p es suprayectiva para cada $p \in f^{-1}(q)$. Es decir, q es un valor regular. Esto muestra que el concepto de transversalidad es una generalización del concepto de valor regular.

Proposición 2.8. *Sean M, N variedades diferenciables, $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas y Q una subvariedad diferenciable de N. Si f es* *transversal a Q, entonces $f^{-1}(Q)$ es una subvariedad de M y*

$$\dim M - \dim f^{-1}(Q) = \dim N - \dim Q.$$

Antes de pasar a la demostración, una cuestión de notación. Si Q es una subvariedad de la variedad N, definimos la *codimensión de Q en N* como la diferencia $\dim N - \dim Q$. Así, la ecuación anterior puede enunciarse diciendo que la codimensión de la imagen inversa de Q (en M) es igual a la codimensión de Q (en N).

Demostración. Siguiendo la notación establecida antes de la proposición, sean $m = \dim N$, $k = \dim Q$ y $q \in Q$. Sea V una vecindad de q en N tal que $Q \cap V = g^{-1}(0)$, $g : V \to \mathbb{R}^{m-k}$ y 0 valor regular de g. Mostraremos que 0 es valor regular de $g \circ f$.

Sea $p \in f^{-1}(q)$. Por la condición de transversalidad (2.1),

$$df_p(T_pM) + T_qQ = T_qN,$$

de modo que al aplicar dg_q a la ecuación anterior,

$$dg_q(df_p(T_pM)) + dg_q(T_qQ) = dg_q(T_qN).$$

Como 0 es valor regular de g y $g(q) = 0$, el lado derecho de esta ecuación es igual a $T_0\mathbb{R}^{m-k} = \mathbb{R}^{m-k}$. Por otro lado, la proposición 2.4 dice que $dg_q(T_qQ) = \{0\}$, de modo que la ecuación anterior se transforma en

$$d(g \circ f)_p(T_pM) = dg_q(df_p(T_pM)) = \mathbb{R}^{m-k},$$

lo que dice que $d(g \circ f)_p$ es suprayectiva. Como esto vale para cada $p \in (g \circ f)^{-1}(0)$, tenemos que 0 es un valor regular de $g \circ f$ y por tanto $f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(V)$ es una subvariedad de M. Aplicando el mismo argumento para cada $q \in Q$, tenemos que $f^{-1}(Q)$ es una subvariedad de M. La afirmación sobre la dimensión se desprende de la proposición 2.3, pues si $n = \dim M$, entonces

$$\dim f^{-1}(Q) = \dim(g \circ f)^{-1}(0) = n - (m - k).$$

de modo que $n - \dim f^{-1}(Q) = m - k$. □

Para hacerse una mejor idea del concepto de transversalidad y más precisamente de la ecuación (2.1) que lo define, se puede pensar en la siguiente situación: Sea M una subvariedad de N e $i : M \to N$ la transformación de inclusión de M en N, de modo que si Q es otra subvariedad de N, la imagen inversa $i^{-1}(Q)$ no es más que la intersección de Q con M. De hecho, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.9. *Sean M, Q subvariedades de una variedad N. Decimos que M y Q son* transversales *y escribimos $M \pitchfork Q$ si*

$$T_pM + T_pQ = T_pN, \quad \text{para todo } p \in M \cap Q.$$

Dejamos al lector los detalles para ver que $M \pitchfork Q$ es equivalente a $i \pitchfork Q$, donde $i : M \to N$ es la inclusión de M en N. Además, el lector puede usar esta definición para dar ejemplos de intersecciones transversales o no transversales.

2.3. Teorema de Sard

En las dos secciones anteriores estudiamos condiciones para que la imagen inversa de una subvariedad sea a su vez una subvariedad. Sin embargo, uno puede preguntarse si tales condiciones son frecuentes o no.

En el caso del ejemplo que ya hemos mencionado antes, el de la función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

tenemos muy buena suerte: Es fácil ver que cada $r > 0$ es un valor regular de f, mientras que $r = 0$ no lo es. Así, casi todos los valores de f son valores regulares. (Mencionamos adicionalmente el caso $r < 0$, donde se cumple la definición de regularidad por vacuidad.)

Pero ¿ocurrirá esto en general? ¿Habrá muchos más valores regulares de f que valores no regulares? El teorema principal de esta sección, el Teorema de Sard, nos dará respuesta a esta cuestión. Por lo pronto, daremos una definición para no cargar todo el tiempo con el adjetivo “no regular”.

Definición 2.10. *Sean M, N variedades diferenciables, $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas, $p \in M$ y $q \in N$. Decimos que*

- *$p \in M$ es un* punto crítico *de f si df_p no es suprayectiva.*
- *$q \in N$ es un* valor crítico *si existe al menos un punto $p \in f^{-1}(q)$ que sea punto crítico de f.*

Intuitivamente, el Teorema de Sard nos dirá que los valores críticos de una transformación forman un conjunto muy pequeño; para precisar esto requiriremos del concepto de *medida cero*, que probablemente el lector conozca de cursos de cálculo o análisis. A continuación daremos una breve introducción a este concepto. Como seguiremos de cerca el apéndice relativo al tema en [2], remitimos al lector a dicho texto para los detalles.

Definición 2.11. *Decimos que:*

- *Un* paralelepípedo *(cerrado) P en $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de n intervalos cerrados; en símbolos,*

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

- *El* volumen *del paralelepípedo P es*

$$\operatorname{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

- *El paralelepípedo es un* cubo *si $b_i - a_i = b_j - a_j$ para toda i, j.*

- *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$* tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$ *si para cada $\epsilon > 0$ existe una familia a lo más numerable de cubos $\{C^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ de modo que*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C^j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(C^j) < \epsilon.$$

El lector puede convencerse fácilmente de los siguientes hechos básicos relativos a este concepto:

- Todo subconjunto de un conjunto con medida cero en $\mathbb{R}^n$ tiene a su vez medida cero en $\mathbb{R}^n$.

- Una unión a lo más numerable de conjuntos con medida cero en $\mathbb{R}^n$ tiene a su vez medida cero en $\mathbb{R}^n$.

Más adelante usaremos el siguiente hecho, cuya demostración aparece, por ejemplo, en [2].

Proposición 2.12. *Un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ no tiene medida cero. Como consecuencia, el complemento de un conjunto con medida cero en $\mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.*

Observación 2.13. *Con frecuencia utilizaremos el siguiente hecho: Puesto que $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como la unión numerable de subconjuntos compactos, todo conjunto con medida cero en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como la unión numerable de conjuntos con medida cero y cerradura compacta.*

El concepto de medida cero se puede extender al contexto de las variedades con el truco "usual"; es decir, usando cartas, pero para ello necesitamos un resultado previo.

Proposición 2.14. *Un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ transforma conjuntos con medida cero en conjuntos con medida cero.*

La idea de la demostración (cuyos detalles aparecen en [2]) es la siguiente: Expresamos al dominio del difeomorfismo como una unión de conjuntos compactos, de modo que en cada uno de ellos se cumpla una condición de Lipschitz. Usamos dicha condición para mostrar que la imagen de un cubo contenido en el dominio está contenida en un cubo cuyo volumen no crece demasiado. Puesto que un conjunto con medida cero está contenido en una unión numerable de cubos cuya suma de volúmenes es menor que ϵ, se puede mostrar que la imagen está contenida en una unión de cubos cuya suma de volúmenes es menor que un múltiplo de ϵ.

Este resultado nos permite definir el concepto de medida cero en variedades.

Definición 2.15. *Sea M^n una variedad diferenciable y $\mathcal{A}$ un atlas numerable para M. Un conjunto $A \subset M$* tiene medida cero en M *si para cada carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi(A)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Ahora podemos enunciar uno de los resultados más importantes que veremos en este curso.

Teorema 2.16 (de Sard)**.** *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. Entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en N.*

La demostración completa del teorema de Sard aparece en la referencia [2].

Observación 2.17. *Aunque no lo destacamos al momento de definir* puntos *críticos y* valores *críticos, es importante notar que el enunciado del teorema de Sard se refiere a un subconjunto del contradominio de una transformación y no a uno del dominio. Tal vez la forma más sencilla de recordar este hecho consiste en ver qué ocurre con una transformación constante. En este caso, los puntos críticos son* todos *los elementos del dominio, mientras que el único valor crítico es el valor constante de la transformación.*

Observación 2.18. *Un caso sencillo del teorema de Sard, pero bastante importante por sus implicaciones, ocurre cuando $\dim M < \dim N$. En este caso, ningún punto del dominio puede ser regular, de modo que $f(M)$ es precisamente el conjunto de valores críticos. Así, con esta condición sobre las dimensiones, tenemos que la imagen de f tiene medida cero en N.*

2.4. Inmersiones y encajes

Los conceptos de valor regular y sumersión nos sirvieron para analizar qué ocurre con la imagen inversa de un conjunto bajo una transformación diferenciable. Ahora veremos bajo qué condiciones podemos garantizar que la imagen *directa* de una transformación $f : M \to N$ es una subvariedad de N. En una especie de "dualidad" (imagen inversa-suprayectividad e imagen directa-inyectividad), veremos que el siguiente concepto dará la clave en este análisis.

Definición 2.19. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas.*

- *f es una* inmersión *en $p \in M$ si y sólo si df_p es inyectiva.*
- *f es una* inmersión *si y sólo si f es una* inmersión *en p para todo $p \in M$.*

Ahora usaremos el teorema del rango (teorema 1.32) para analizar la imagen directa de una inmersión.

Proposición 2.20. *Sean M^n, N^m variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. Si f es inmersión en un punto $p \in M$, entonces existen cartas (U, φ) de una vecindad U de p en M y (V, ψ) de una vecindad V de $f(p)$ en N con $\varphi(p) = 0$ y $\psi(f(p)) = 0$ tales que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0).$$

Demostración. De acuerdo con la segunda parte del enunciado del teorema del rango, basta mostrar que si f es inmersión en un punto p, entonces f es inmersión en una vecindad de p. Puesto que la derivada de f en p es una matriz $m \times n$ de rango n, usando coordenadas adecuadas podemos suponer que en una vecindad de p

$$Df_q = \begin{bmatrix} A(q) \\ :: \end{bmatrix}, \quad \text{con } \det A(p) \neq 0.$$

Por continuidad, hay una vecindad de p donde $\det A(q) \neq 0$ para toda q en tal vecindad, lo cual implica que f es inmersión en q para tales puntos. □

La proposición anterior NO implica que la imagen de una inmersión sea una subvariedad del contradominio. Pensemos en un ejemplo sencillo, el de una inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$; es decir, una curva (diferenciable) en $\mathbb{R}^3$. La condición para tener una inmersión es que el vector tangente a dicha curva sea siempre diferente de cero, de modo que el lector podrá trazar varios ejemplos de curvas que no son subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^3$. El toque que le falta a una inmersión para que las imágenes directas de variedades sean subvariedades del contradominio viene dado en la siguiente definición.

Definición 2.21. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. f es un* encaje *si y sólo si f es una inmersión y es un homeomorfismo sobre su imagen $f(M)$.*

Conviene insistir sobre el segundo punto de la definición de un encaje. Al establecer la condición de que una transformación sea un homeomorfismo sobre su imagen, estamos presuponiendo que la topología de la imagen $f(M) \subset N$ es precisamente la inducida por la topología de N. Para aclarar este punto, pensemos en una curva inyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea una figura "8". Si consideramos esta figura con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$, ésta no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$, pues tiene un punto problemático. (¿Qué ocurre en este caso?) El lector podrá convencerse que esta topología es diferente de aquella que hace de f un homeomorfismo.

Con frecuencia es útil una definición alternativa de encaje; para presentarla necesitamos una definición.

Definición 2.22. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. f es* propia *si para cada conjunto compacto en N su imagen inversa es un conjunto compacto en M.*

Proposición 2.23. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. f es un encaje si y sólo si f es una inmersión inyectiva y propia.*

Demostración. Sólo tenemos que probar que $f^{-1} : f(M) \to M$ es continua. Si $U \subset M$ es abierto, entonces $M \setminus U$ es cerrado. Como la variedad M es compacta, $M \setminus U$ es compacto. Así, $f(M \setminus U)$ es compacto y por consiguiente cerrado. Como f es inyectiva, $f(M \setminus U) = f(M) \setminus f(U)$, de donde $f(U)$ es abierto en $f(M)$. □

Corolario 2.24. *Si $f : M \to N$ es una inmersión inyectiva y M es compacta, entonces f es un encaje.*

El último resultado de la sección muestra la utilidad del concepto de encaje.

Proposición 2.25. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una transformación diferenciable entre ellas. Si f es un encaje, entonces $f(M)$ es una subvariedad diferenciable de N, con la misma dimensión que M.*

Demostración. Es fácil ver que si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable para M, entonces $\{(f(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ f^{-1})\}$ es una estructura diferenciable para $f(M)$. □

2.5. Teorema de Whitney: El caso compacto

Intuitivamente, el encaje de una variedad en otra proporciona una copia de la primera variedad. Una pregunta que puede surgir en este contexto es si existe un espacio que contenga copias de todas las variedades con cierta dimensión fija. La buena noticia es que podemos elegir dicho espacio como algún $\mathbb{R}^q$, donde q depende sólo de la dimensión de la variedad. En esta sección mostraremos este resultado para el caso de las variedades compactas, viendo que:

- Cualquier variedad diferenciable compacta puede encajarse en algún espacio euclidiano (probablemente de dimensión grande).
- Si una variedad diferenciable de dimensión n está encajada en un espacio euclidiano de dimensión $q > 2n+1$, entonces es posible obtener un encaje en un espacio euclidiano de dimensión $q-1$.

Para la demostración del primer punto, usaremos una función auxiliar cuya construcción damos en el siguiente lema.

Lema 2.26. *Sea $D^n(r)$ el disco abierto de radio r en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una función diferenciable $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ igual a 1 en $\overline{D^n(1)}$ e igual a 0 en $\mathbb{R}^n \smallsetminus D^n(2)$.*

Demostración. Recordemos que la función $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-\frac{1}{t}), & t \geq 0, \end{cases}$$

es diferenciable. Es fácil convencerse que la función

$$\phi(t) = \frac{\int_t^2 \mu(\tau-1)\mu(2-\tau)\, d\tau}{\int_1^2 \mu(\tau-1)\mu(2-\tau)\, d\tau}$$

tiene las propiedades requeridas para el caso $n = 1$. Finalmente, si $x \in \mathbb{R}^n$ definimos $\varrho(x) = \phi(\|x\|)$. □

Teorema 2.27. *Sea M una variedad diferenciable compacta. Entonces existe un encaje de M en $\mathbb{R}^q$ para alguna q.*

Demostración. Sea $n = \dim M$. Como M es compacta, podemos elegir un atlas finito $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, \ldots, k$ para M. De hecho, es fácil convencerse de que podemos suponer adicionalmente que $\varphi_i(U_i) = D^n(2)$ y que

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Int} \varphi_i^{-1}(D^n(1)). \tag{2.2}$$

Usaremos la función ϱ construida en el lema 2.26. Para cada $i = 1, \ldots, k$, definimos $\mu_i : M \to \mathbb{R}$ como

$$\mu_i(p) = \begin{cases} \varrho(\varphi_i(p)), & p \in U_i, \\ 0, & p \notin U_i, \end{cases}$$

y $f_i : M \to \mathbb{R}^n$ como

$$f_i(p) = \begin{cases} \mu_i(p)\varphi_i(p), & p \in U_i, \\ 0, & p \notin U_i, \end{cases}$$

Finalmente, sea

$$f = (\mu_1 f_1, \ldots, \mu_k f_k, \mu_1, \ldots, \mu_k) : M \to \mathbb{R}^q, \quad \text{donde } q = k(n+1).$$

Es claro que f es diferenciable. Mostraremos que f es el encaje buscado.

Veamos primero que f es una inmersión. Si $p \in \operatorname{Int} \varphi_i^{-1}(D^n(1))$, entonces $\mu_i f_i = f_i = \varphi_i$ en una vecindad de p y $d(\mu_i f_i)_p = d(\varphi_i)_p$ es un isomorfismo. En particular, $d(\mu_i f_i)_p$ es inyectiva. Esto implica a su vez que df_p es inyectiva.

Ahora veamos que f es inyectiva. Supongamos que $f(p) = f(q)$, con $p, q \in M$. Por la ecuación (2.2), existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $p \in \operatorname{Int} \varphi_i^{-1}(D^n(1))$, de modo que $\mu_i(p) = 1$. Por tanto, $\mu_i(q) = 1$ y así $q \in \operatorname{Int} \varphi_i^{-1}(D^n(1))$. Luego

$$f_i(p) = \mu_i(p) f_i(p) = \mu_i(q) f_i(q) = f_i(q),$$

de modo que $\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$ y $p = q$.

Sólo falta ver que f^{-1} es continua, lo que es equivalente a ver que f transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, o bien, transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Pero esto es inmediato, pues M es compacta y f es continua. □

Ahora pasaremos a la segunda parte de la demostración del teorema de Whitney.

Teorema 2.28 (de Whitney)**.** *Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n. Entonces M admite un encaje en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Demostración. Por el teorema 2.27, sabemos que M admite un encaje $f : M \to \mathbb{R}^q$, de modo que si $q \leq 2n+1$, basta componer f con una inclusión de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Para el caso $q > 2n+1$, la idea de la demostración consiste en buscar un vector $w \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ tal que la composición del encaje f con la proyección π_w sobre el espacio ortogonal a w (que es isomorfo a $\mathbb{R}^{q-1}$) sigue siendo un encaje.

Supongamos, por el contrario, que la composición $\pi_w \circ f : M \to \mathbb{R}^{q-1}$ no es un encaje y para fijar ideas, supongamos primero que tuvimos la mala suerte de elegir w tal que la transformación no es inyectiva, de modo que existen $p, q \in M$ tales que

$$\pi_w \circ f(p) = \pi_w \circ f(q);$$

o, en forma equivalente, $\pi_w(f(p)-f(q)) = 0$, lo cual implica que el vector $f(p)-f(q)$ es un múltiplo de w. Observemos que dicho vector es distinto de cero, pues f es inyectiva; así, existe un número real $t \neq 0$ tal que

$$f(p) - f(q) = tw, \quad \text{o bien} \quad w = \frac{1}{t}(f(p) - f(q)).$$

De este modo, w está en la imagen de la transformación

$$F : M \times M \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^q, \quad F(p,q,t) = \frac{1}{t}(f(p) - f(q)).$$

De manera análoga, supongamos que $\pi_w \circ f$ no es inmersión, de modo que existe un punto $p \in M$ y un vector $v \neq 0$ tales que

$$0 = d(\pi_w \circ f)_p(v) = d(\pi_w)_{f(p)}(df_p(v));$$

como π_w es una proyección, podemos identificarla con su diferencial $d(\pi_w)_{f(p)}$, de modo que $\pi_w(df_p(v)) = 0$. Esto implica que el vector $df_p(v)$ es un múltiplo de w, es decir, $df_p(v) = tw$. De nuevo, se tiene que $t \neq 0$ y por tanto w está en la imagen de la transformación

$$G : TM \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^q, \quad G(p,v,t) = \frac{1}{t} df_p(v).$$

Finalmente, como $q > 2n+1$, tenemos por la observación 2.18 y las propiedades de los conjuntos con medida cero que la unión de las imágenes de F y G tiene medida cero en $\mathbb{R}^q$. Por la proposición 2.12, podemos elegir w fuera de tal unión, con lo que para tal w se tiene que $\pi_w \circ f$ es una inmersión inyectiva. Como M es compacta, esta transformación también es propia y por tanto es un encaje de M en $\mathbb{R}^{q-1}$. Continuamos de este modo hasta obtener un encaje de M en $\mathbb{R}^{2n+1}$. □

Observación 2.29. *La demostración anterior puede refinarse un poco. Por la linealidad de la diferencial, $df_p(v) = tw$ es equivalente a $df_p(v/t) = w$, de modo que basta considerar la transformación de TM en $\mathbb{R}^q$ dada por $(p,v) \mapsto df_p(v)$. Puesto que $\dim TM = 2n$, el argumento de la demostración prueba que podemos obtener una inmersión de M en $\mathbb{R}^{2n}$.*

Capítulo 3

Introducción a la teoría de grado

El teorema de Sard garantiza que el conjunto de valores regulares de una transformación entre variedades es denso. Puesto que el concepto de transversalidad generaliza el concepto de valor regular, es justo preguntarse si el conjunto de transformaciones $f : M \to N$ transversales a una subvariedad $Q \subset N$ es denso en cierto sentido. Aquí daremos una respuesta parcial a esta cuestión, mediante la llamada *transversalidad paramétrica*, analizando familias de transformaciones que varían de acuerdo con un parámetro. Como ejemplo de esto, pensemos en una familia de transformaciones $f_t : M \to N$ donde $t \in [0,1]$ y $f_0 = f$ es una transformación transversal a Q. ¿Qué podremos decir de cada f_t?

Usaremos esta transversalidad paramétrica para contar el número de intersecciones de dos variedades. Como veremos más adelante, esta teoría de intersección será una herramienta central para deducir un conjunto de resultados muy importantes de la topología diferencial.

3.1. Transversalidad paramétrica

Como mencionamos al principio de este capítulo, es de nuestro interés saber si las transformaciones transversales a una subvariedad fija forman un conjunto "denso" en cierto sentido. Consideraremos entonces una familia de transformaciones indexada por un conjunto de parámetros dado por una variedad diferenciable S. El resultado fundamental es el siguiente.

Teorema 3.1. *Sea M_1 una variedad con frontera, mientras que M_2, N y $Q \subset N$ son variedades sin frontera. Sea $F : M_1 \times M_2 \to N$ una transformación diferenciable y definamos para cada $s \in M_2$ la transformación $f_s : M_1 \to N$ dada por $f_s(p) = F(p, s)$.*

Supongamos finalmente que F y ∂F son transversales a Q. Entonces f_s y ∂f_s son transversales a Q para cada s en un conjunto denso de M_2.

Con la ayuda de este teorema, podemos dar una primera formalización de la afirmación de que hay muchas transformaciones transversales a una subvariedad dada. Usaremos el concepto de homotopía, que definimos a continuación.

Definición 3.2. *Sean M una variedad con frontera, N una variedad sin frontera y $f, g : M \to N$ dos transformaciones diferenciables. Una* homotopía *entre f y g es una transformación diferenciable $H : [0,1] \times M \to N$ tal que*

$$H(0,p) = f(p), \quad H(1,p) = g(p), \quad \text{para toda } p \in M.$$

Decimos que f y g son homotópicas *si existe una homotopía $H : [0,1] \times M \to N$ entre ellas.*

Observación 3.3. *El lector familiarizado con el concepto general de homotopía observará que en ciertos contextos sólo se exige que H sea una transformación continua, pero en nuestro caso siempre usaremos homotopías diferenciables.*

El segundo comentario es más sutil: Puesto que $[0,1] \times M$ no es una variedad si $\partial M \neq \varnothing$, entendemos la diferenciabilidad de H en términos de una extensión diferenciable de H a un conjunto $(a,b) \times M$ tal que $[0,1] \subset (a,b)$.

Veamos entonces una consecuencia importante del teorema 3.1.

Corolario 3.4. *Sean M una variedad con frontera y $f : M \to \mathbb{R}^m$ una transformación diferenciable. Sea Q una subvariedad de $\mathbb{R}^m$. Entonces existe una transformación $g : M \to \mathbb{R}^m$ homotópica a f tal que $g \pitchfork Q$.*

Demostración. Sea $D^m(1)$ el disco unitario en $\mathbb{R}^m$ y $F : M \times D^m(1) \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(p,s) = f(p) + s$. Es fácil ver que $dF_{(p,s)}$ siempre es suprayectiva, de modo que F es transversal a cualquier subvariedad Q. Por el teorema 3.1, $f_s(p) = f(p) + s$ es transversal a Q para cada s en un conjunto denso en $D^m(1)$. Elegimos entonces $g = f_s$ para una de tales s. La transformación $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^m$ definida por $H(t,p) = f(p) + ts$ es una homotopía (diferenciable) entre f y g. □

Extenderemos estos resultados al caso en que $f : M \to N$, donde N es una variedad compacta arbitraria, de la manera siguiente: Por el teorema de Whitney 2.27, podemos suponer que N está contenida en algún $\mathbb{R}^q$. Usando el corolario anterior 3.4, podemos deformar a f (pensada con contradominio en $\mathbb{R}^q$) para obtener una transformación homotópica a f que sea transversal a alguna subvariedad de $\mathbb{R}^q$. El detalle aquí es que tenemos que regresar todo este proceso para considerar sólo transformaciones con contradominio en N. Para esto usaremos una herramienta adicional, la llamada *vecindad tubular*. En esencia, dicha vecindad tubular es una vecindad de N en $\mathbb{R}^q$ que se puede proyectar de manera adecuada en N. La situación se formaliza como sigue.

Definición 3.5. *Sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una subvariedad compacta sin frontera. Para cada $\epsilon > 0$, sea N^ϵ el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^q$ que distan de N menos que ϵ. Llamamos a N^ϵ una* vecindad tubular *de N en $\mathbb{R}^q$.*

Teorema 3.6. *Sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una subvariedad compacta sin frontera. Entonces existe una vecindad tubular N^ϵ y una sumersión $\pi : N^\epsilon \to N$ tal que $\pi(q) = q$ para todo $q \in N$.*

Como ya dijimos, usaremos las vecindades tubulares para extender los resultados relativos a la densidad de las transformaciones transversales a una subvariedad.

Teorema 3.7. *Sea M una variedad con frontera, N una variedad compacta sin frontera, $f : M \to N$ una transformación diferenciable y $Q \subset N$ una subvariedad sin frontera. Entonces existe una transformación $g : M \to N$ homotópica a f tal que g y ∂g son transversales a Q.*

Demostración. De nuevo suponemos que $N \subset \mathbb{R}^q$ para alguna q. Sean N^ϵ la vecindad tubular de N y $\pi : N^\epsilon \to N$ la sumersión garantizadas por el teorema 3.6. Sea $D^q(1)$ el disco unitario en $\mathbb{R}^q$ y definamos $F : M \times D^q(1) \to N$ como

$$F(p, s) = \pi(f(p) + \epsilon s).$$

Note que $F(p, 0) = f(p)$. Para cada $p \in M$, la transformación $p \mapsto f(p) + \epsilon s$ es una sumersión, de modo que su composición con π sigue siendo una sumersión. Entonces F y ∂F son sumersiones. Por el teorema 3.1 tenemos que f_s y ∂f_s son transversales a Q para s en un conjunto denso en $D^q(1)$. Claramente, cada f_s es homotópica a f, con la homotopía $H : [0, 1] \times M \to N$ dada por $H(t, p) = F(p, ts)$. □

Usaremos una versión un poco más fuerte de este resultado. Supongamos que la transformación $f : M \to N$ ya es transversal a Q en un subconjunto de M; quisiéramos que la transformación g homotópica a f y transversal a Q coincidiera con f en tal subconjunto. Esto realmente ocurre para subconjuntos cerrados de M. La forma que necesitamos de este resultado es la siguiente.

Proposición 3.8. *Sea M una variedad con frontera, N una variedad sin frontera, $f : M \to N$ una transformación diferenciable y $Q \subset N$ una subvariedad sin frontera. Supongamos además que $\partial f \pitchfork Q$. Entonces existe una transformación $g : M \to N$ homotópica a f tal que $\partial f = \partial g$ y $g \pitchfork Q$.*

3.2. Intersección y grado módulo 2

Consideremos la siguiente situación: Sean M y Q subvariedades de N (todas sin frontera) tales que $M \pitchfork Q$ y

$$\dim M + \dim Q = \dim N.$$

(Cuando esta ecuación se satisfaga, diremos que M y Q tienen *dimensiones complementarias.*) En este caso, la intersección $M \cap Q$ resulta ser una variedad de dimensión cero. Además, si alguna de las dos subvariedades es compacta, la intersección es un número finito de puntos. (Para fijar ideas, supongamos que M es compacta.) Queremos estudiar cómo varía la cardinalidad de $M \cap Q$ al variar M, en un sentido que precisaremos a continuación.

Como mencionamos en la sección 2.2, esta situación se puede generalizar suponiendo que M es una variedad no necesariamente contenida en N (compacta, con dimensión complementaria a Q) y $f : M \to N$ es una transformación diferenciable, transversal a Q. Ahora queremos analizar las propiedades del conjunto (finito) $f^{-1}(Q)$ que se preservan bajo transformaciones homotópicas.

Teorema 3.9. *Bajo las condiciones arriba mencionadas sobre M, N y Q, sean $f_0, f_1 : M \to N$ transformaciones diferenciables homotópicas entre sí y ambas transversales a Q. Entonces*

$$\# f_0^{-1}(Q) = \# f_1^{-1}(Q) \quad (\text{módulo}\, 2),$$

donde # denota la cardinalidad del conjunto correspondiente.

Demostración. Sea $H : [0,1]\times M \to N$ una homotopía entre f_0 y f_1. Por la proposición 3.8, podemos suponer que $H \pitchfork Q$, de modo que $H^{-1}(Q)$ es una variedad de dimensión uno, con frontera dada por

$$\partial(H^{-1}(Q)) = H^{-1}(Q) \cap \partial([0,1] \times M) = (\{0\} \times f_0^{-1}(Q)) \cup (\{1\} \times f_1^{-1}(Q));$$

Terminamos la demostración observando que una variedad de dimensión uno debe tener como frontera un número par de puntos (¡ejercicio!). □

Ahora podemos definir un concepto central en topología diferencial.

Definición 3.10. *Sean M y N variedades sin frontera, con M compacta. Además, sea $Q \subset N$ una subvariedad sin frontera, con dimensión complementaria a M. Finalmente, sea $f : M \to N$ una transformación diferenciable transversal a Q. Definimos el* número de intersección módulo 2 de f y Q, *denotado $I_2(f,Q)$, como*

$$I_2(f,Q) = \# f^{-1}(Q) \quad (\text{módulo}\, 2).$$

así, si $f_0, f_1 : M \to N$ son transformaciones diferenciables homotópicas entre sí y ambas transversales a Q, entonces $I_2(f_0, Q) = I_2(f_1, Q)$. Además, la transversalidad paramétrica nos permite extender la definición al caso de una transformación arbitraria $f : M \to N$: Simplemente elegimos una transformación $g : M \to N$ homotópica a f, transversal a Q y definimos $I_2(f, Q)$ como $I_2(g, Q)$.

Un caso particularmente útil en que $I_2(f, Q)$ se anula es el siguiente.

Teorema 3.11. *Sean M, N, Q como antes y $f : M \to N$ una transformación diferenciable. Supongamos que M es la frontera de una variedad diferenciable $\widehat{M}$ y que f se puede extender a todo $\widehat{M}$. Entonces $I_2(f, Q) = 0$.*

Demostración. Como en otras demostraciones, podemos suponer que $f \pitchfork Q$. Inclusive, si $F : \widehat{M} \to N$ es una extensión de f, también suponemos que $F \pitchfork Q$. Entonces $F^{-1}(Q)$ es una subvariedad de dimensión uno, con frontera. Por tanto $\#\partial F^{-1}(Q)$ es par, de modo que $I_2(f, Q) = 0$. □

Recordemos que el concepto de transversalidad generaliza el de valor regular de una transformación diferenciable $f : M \to N$. A continuación damos la versión de nuestros recientes resultados adecuada a dicho caso particular.

Proposición 3.12. *Sean M, N variedades diferenciables (sin frontera) con la misma dimensión, M compacta, N conexa y $f : M \to N$ diferenciable. Entonces $I_2(f, \{q\})$ no depende de $q \in N$.*

Demostración. Como de costumbre, podemos suponer que f es transversal a $\{q\}$; en otras palabras, suponemos que q es un valor regular de f. Como M es compacta, $f^{-1}(q)$ es una colección finita de puntos $p_1, \ldots, p_k$. Como $\dim M = \dim N$, por el teorema de la función inversa existen una vecindad V de q en N y vecindades U_i de cada p_i en M, $i = 1, \ldots, k$, tales que $f|_{U_i} : U_i \to V$ es un difeomorfismo. Podemos suponer además que las vecindades U_i son ajenas entre sí. Esto implica que $\#f^{-1}(r) = k$ para cada $r \in V$, de modo que la función $r \mapsto I_2(f, r)$ es constante en V. Como N es conexa, esta función es constante en N. □

Definición 3.13. *Bajo las condiciones de la proposición anterior, el número $I_2(f, \{q\})$ se llama el* grado de f módulo 2 *y se denota por* $\text{grado}_2 f$. *así, si q es un valor regular de f,*

$$\text{grado}_2 f = \#f^{-1}(q) \quad (\text{módulo}\, 2).$$

Los siguientes resultados son consecuencia de los teoremas 3.9 y 3.11, respectivamente.

Corolario 3.14. *Sean M una variedad compacta, N una variedad conexa con* $\dim M = \dim N$ *y $f_0, f_1 : M \to N$ transformaciones homotópicas entre sí. Entonces*

$$\mathrm{grado}_2 f_0 = \mathrm{grado}_2 f_1.$$

Corolario 3.15. *Sean M una variedad compacta, N una variedad conexa con* $\dim M = \dim N$ *y $f : M \to N$ una transformación diferenciable. Supongamos además que M es la frontera de una variedad compacta $\widehat{M}$ y que f se puede extender de manera diferenciable a $\widehat{M}$. Entonces* $\mathrm{grado}_2 f = 0$.

3.3. Orientación

En esta sección daremos los elementos mínimos del concepto de orientación necesarios para extender los resultados de intersección y grado módulo 2 al caso general (sin el módulo 2).

Comencemos con un espacio vectorial E de dimensión finita n. Podemos establecer una relación entre las bases ordenadas de E, diciendo que *dos bases ordenadas de E están relacionadas* si la matriz de cambio de base entre ellas tiene determinante positivo. Puede verse fácilmente que ésta es una relación de equivalencia y que sólo existen dos clases de equivalencia, que llamaremos *orientaciones* de E. (Observe la importancia del orden.) Diremos que E está *orientado* si hemos elegido (o "fijado") una de estas orientaciones, que tradicionalmente llamaremos la *orientación positiva*, mientras que la otra se llamará la *orientación negativa*. Cada una de éstas será la *orientación opuesta* a la otra. De manera análoga, diremos que una base es *positiva* o *negativa* si pertenece a la orientación positiva o negativa, respectivamente. Como de costumbre, la *orientación canónica de* $\mathbb{R}^n$ es aquella en que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es positiva.

Observación 3.16. *En el caso particular en que $E = \{0\}$, una orientación para E estará dada por un número $+1$ o -1.*

Definición 3.17. *Sean E, F espacios vectoriales orientados, con la misma dimensión, y $L : E \to F$ un isomorfismo entre ellos. Diremos que L* preserva (invierte) la orientación *si L transforma una base positiva de E en una base positiva (negativa) de F. Es fácil ver que esta definición no depende de las bases elegidas para E o F.*

Definición 3.18. *Sea M una variedad diferenciable, con frontera. Una* orientación *consiste en la elección de una orientación para cada espacio tangente T_pM, que varía continuamente en el siguiente sentido: Dada una carta (U, φ) de un conjunto abierto* *y conexo* $U \subset M$, $d\varphi_p$ *manda bases positivas en bases positivas para todo* $p \in U$, *o bien manda bases positivas en bases negativas para todo* $p \in U$.

Decimos que M *es* orientable *si admite (al menos) una orientación. En caso de que* M *sea orientable y hayamos elegido una orientación para* M, *diremos que* M *está orientada.*

Es fácil ver que una variedad conexa orientable admite exactamente dos orientaciones.

Por otro lado, si para una variedad M hemos fijado una orientación como positiva, denotaremos por $-M$ a la misma variedad, pero con la orientación negativa.

Ejemplo 3.19. *Sean* $M_1^{n_1}$ *una variedad con frontera y* $M_2^{n_2}$ *una variedad sin frontera, ambas orientadas. Si* $p_1 \in M_1$ *y* $p_2 \in M_2$, *entonces*

$$T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2,$$

de modo que si $\beta_1 = \{w_1, \dots, w_{n_1}\}$ *y* $\beta_2 = \{v_1, \dots, v_{n_2}\}$ *son bases de* $T_{p_1}M_1$ *y* $T_{p_2}M_2$, *respectivamente, entonces*

$$(\beta_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \beta_2) := \{(w_1, 0), \dots, (w_{n_1}, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_{n_2})\}$$

es una base para $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$. *Damos a la variedad con frontera* $M_1 \times M_2$ *una orientación, llamada* orientación producto, *diciendo que*

$$\text{signo}\left((\beta_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \beta_2)\right) := \text{signo}(\beta_1) \cdot \text{signo}(\beta_2).$$

Ejemplo 3.20. *Sea* N^m *una variedad con frontera. Se puede ver que en cada punto* $q \in N$ *se puede elegir una base* $\{\eta_q, w_1, \dots, w_{m-1}\}$ *de* T_qN *tal que* $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ *es una base de* $T_q\partial N$ *y* η_q *es un vector que apunta hacia afuera de* N, *llamado un* vector normal exterior. *(Ejercicio: Formalice este concepto.)*

Supongamos ahora que N *está orientada. Damos a la frontera* ∂N *una orientación, llamada* orientación frontera, *diciendo que*

$$\text{signo}(\{w_1, \dots, w_{m-1}\}) := \text{signo}(\{\eta_q, w_1, \dots, w_{m-1}\}).$$

Como ejercicio para entender estas definiciones, consideremos el caso de $[0,1] \times M$, donde M es una variedad sin frontera. Recordemos (corolario 1.38) que

$$\partial([0,1] \times M) = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M) =: M_0 \cup M_1.$$

donde M_0, M_1 son copias de M. Ahora supongamos que M está orientada. El lector podrá convencerse de que, al dar la orientación frontera a $\partial([0,1] \times M)$ tendremos que

$$\partial([0,1] \times M) = M_1 - M_0;$$

es decir, las copias de M en la frontera tienen orientaciones opuestas. En particular, si $\dim M = 1$ y M es conexa (es decir, si M es un intervalo cerrado), los números de orientación de M_0 y M_1 tendrán signos opuestos. Puesto que una variedad compacta de dimensión uno será una unión finita de espacios homeomorfos a circunferencias (con frontera vacía) o intervalos cerrados (con dos extremos cada uno), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.21. *La suma de los números de orientación en la frontera de una variedad compacta orientada de dimensión uno es igual a cero.*

Antes de ver cómo definir la teoría de intersección (sin el módulo 2) haremos un último comentario acerca de la forma de orientar la imagen inversa de una subvariedad $Q \subset N$ dada una transformación $f : M \to N$ tal que f es transversal a Q y fijas orientaciones en M, N y Q. Por el momento y para fijar ideas, supondremos que todas las variedades tienen frontera vacía.

Debemos dar una orientación a $T_p(f^{-1}(Q))$ para cada $p \in f^{-1}(Q)$. Sea $E \subset T_pM$ un subespacio de T_pM complementario a $T_p(f^{-1}(Q))$ en T_pM; es decir, tal que

$$E \oplus T_p(f^{-1}(Q)) = T_pM. \tag{3.1}$$

Al aplicar df_p se tiene para $q = f(p)$ que

$$df_p(E) + T_qQ = T_qN,$$

pero la condición de transversalidad y algunos cálculos con las dimensiones implican que $df_p : E \to df_p(E)$ es un isomorfismo; además, resulta que $df_p(E)$ y T_qQ tienen dimensiones complementarias, lo que trae finalmente como consecuencia que la suma anterior es directa. Puesto que T_qQ y T_qN ya están orientadas, podemos dar una orientación a $df_p(E)$. El siguiente paso consiste en dar una orientación a E de modo que $df_p|_E$ sea un isomorfismo que preserve orientación. Por último, como T_pM ya tiene una orientación, podemos usar (3.1) para dar una orientación a $T_p(f^{-1}(Q))$, llamada *orientación de imagen inversa*.

Para cerrar esta sección, modificamos la situación anterior de modo que ahora M sea una variedad con frontera (y que $\partial f \pitchfork Q$). Entonces la frontera de $f^{-1}(Q)$ recibe dos orientaciones, su orientación frontera y la orientación de imagen inversa bajo ∂f. Con un poco de calma se puede ver que ambas orientaciones están relacionadas por la expresión

$$\partial(f^{-1}(Q)) = (-1)^{\operatorname{codim}_N Q}(\partial f)^{-1}(Q), \tag{3.2}$$

donde la variedad que aparece del lado izquierdo tiene la orientación frontera.

3.4. Teoría de intersección y grado

Por simple que parezca, la proposición 3.21 de la sección anterior es la clave para extender las teorías de intersección y grado al caso "sin el módulo 2". Nuestro escenario es el siguiente: M, N y $Q \subset N$ son variedades orientadas, M es compacta, Q es cerrada y

$$\dim M + \dim Q = \dim N.$$

Sea $f : M \to N$ una transformación transversal a Q, de modo que $f^{-1}(Q)$ es un conjunto finito de puntos. Asociamos a cada $p \in f^{-1}(Q)$ un número de orientación ± 1 mediante la orientación de imagen inversa. De hecho, si $p \in f^{-1}(Q)$ y $q = f(p)$, la condición de transversalidad

$$df_p(T_pM) \oplus T_qQ + T_qN$$

junto con las restricciones sobre las dimensiones implican que df_p es un isomorfismo sobre su imagen, lo cual da una orientación de $df_p(T_pM)$. El *número de orientación en p* es $+1$ si esta orientación junto con la de T_qQ da la orientación fija para T_qN.

Definimos el *número de intersección de f con Q*, denotada $I(f, Q)$, como la suma de estos números de orientación en cada $p \in f^{-1}(Q)$. Como en el caso del número de intersección módulo 2, $I(f, Q)$ es invariante bajo homotopías; es decir, si $f_0, f_1 : M \to N$ son transformaciones homotópicas y ambas transversales a Q, entonces $I(f_0, Q) = I(f_1, Q)$. Usando la transversalidad paramétrica, podemos entonces definir sin ambigüedad $I(f, Q)$ para cualquier transformación $f : M \to N$.

Un caso particularmente importante de la teoría de intersección ocurre cuando $Q \subset N$ es una subvariedad tal que $\dim Q = \frac{1}{2} \dim N$, pues podemos considerar el número de intersección $I(i, Q)$ de la transformación de inclusión $i : Q \to N$ con Q, que denotaremos por $I(Q, Q)$ y llamaremos el *número de autointersección de Q*.

¿Por qué es importante este caso? Pensemos en una variedad M compacta y orientada (sin frontera). Denotamos por Δ a la *diagonal* de $M \times M$, es decir, al conjunto

$$\Delta = \{ (p, p) \,|\, p \in M \}.$$

Observemos que Δ es una subvariedad de $M \times M$ (de hecho, es difeomorfa a M) y cumple con las restricciones sobre la dimensión del párrafo anterior, de modo que podemos considerar su número de autointersección, que posiblemente sea mejor conocido por los lectores con otro nombre.

Definición 3.22. *La* característica de Euler de M *es igual al número de autointersección de la diagonal Δ en $M \times M$:*

$$\chi(M) := I(\Delta, \Delta).$$

Como dijimos antes de dar esta definición, es probable que algunos lectores ya hayan tenido contacto con la característica de Euler, al menos para poliedros. La aparición de $\chi(M)$ sugiere la necesidad de un estudio más profundo de las variedades (o de los poliedros) y de sus propiedades topológicas, combinatorias y diferenciales. Como se acostumbra decir, "esto queda fuera de los objetivos de estas notas", pero invitamos al lector a adentrarse en estos fascinantes temas.

Para cerrar este capítulo veamos algunos detalles de lo que ocurre con el grado de una transformación $f : M \to N$.

Recordemos el contexto en que se define el grado: M es una variedad compacta, sin frontera, mientras que N es una variedad conexa, sin frontera y $\dim M = \dim N$. Ahora contamos con el hecho adicional de que M y N están orientadas.

Sea $f : M \to N$ una transformación diferenciable. Si q es un valor regular de f, la demostración de la proposición 3.12 muestra que $\#f^{-1}(q)$ es constante en N. Para cada $p \in f^{-1}(q)$ definimos su *número de orientación* como $+1$ o -1 dependiendo de que $df_p : T_pM \to T_qN$ preserve o invierta la orientación. Finalmente, definimos el *grado de f* como la suma de los números de orientación de los puntos $p \in f^{-1}(q)$.

Proposición 3.23. *Dos transformaciones homotópicas $f_0, f_1 : M \to N$ tienen el mismo grado.*

Idea de la demostración. Sea $H : [0,1] \times M \to N$ una homotopía entre f_0 y f_1 y sea $q \in N$ un valor regular común de H, f_0 y f_1. Entonces $H^{-1}(q)$ es una variedad compacta de dimensión uno, con frontera orientada dada por

$$\partial H^{-1}(q) = f_1^{-1}(q) - f_0^{-1}(q),$$

pero por la proposición 3.21, la suma de los números de orientación en esta frontera es igual a cero. Esto implica a su vez que la suma de números de orientación de los puntos $p \in f_1^{-1}(q)$ coincide con la suma correspondiente para $f_1^{-1}(q)$, de modo que los grados coinciden. □

Comentarios finales

En estas notas hemos tocado algunos aspectos básicos de la topología diferencial, de modo que quedan mucho por desarrollar y explorar. Esta sección busca señalar algunos puntos que podrían ser interesantes y que el lector podrá investigar, por ejemplo, en las referencias que presentaremos un poco más adelante.

- **Particiones de la unidad.** Una de las técnicas más útiles para pasar de conceptos locales a globales es la de *particiones de la unidad*. En particular, ésta se puede usar para demostrar el teorema de Whitney para variedades no compactas. Por razones didácticas, en estas notas utilizamos en muchos momentos el caso de las variedades compactas, pero el lector puede revisar este tema, por ejemplo, en [3].

- **Teoría de singularidades.** Aunque el teorema del rango 1.32 caracteriza a un conjunto grande de transformaciones, es natural preguntarse qué ocurre con una transformación $f : M \to N$ cuyo rango en un punto no es el máximo; por ejemplo, si es posible elegir coordenadas adecuadas en M y N de modo que f adquiera una "forma canónica". Este tipo de cuestiones pertenece a la llamada *teoría de singularidades*. Por ejemplo, se puede definir el concepto de *punto crítico no degenerado* y dar una forma canónica a una transformación en una vecindad de un punto de este tipo. El lector puede leer algunos detalles de esta teoría en [2].

- **Topología del espacio de transformaciones $\{f : M \to N\}$.** Aquí usamos de manera fundamental el concepto de transversalidad paramétrica para mostrar que cualquier transformación tiene cercs otra transformación transversal a una subvariedad. Dotando al espacio $\{f : M \to N\}$ de una topología adecuada, se puede mostrar que las transformaciones transversales a alguna subvariedad del contradominio forman un conjunto denso con respecto de tal topología. Los detalles aparecen en [1].

- **Aplicaciones de la teoría de intersección y la teoría del grado.** Interminables. Algunas de las aplicaciones clásicas incluyen una demostración del teorema fundamental del álgebra, una generalización del teorema de la curva de Jordan, teoremas de retracción, y un largo etcétera. De nuevo recomendamos ampliamente [2].

Bibliografía

[1] Morris Hirsch. *Differential Topology.* Springer, 1976.

[2] Victor Guillemin y Alan Pollack. *Topología diferencial.* Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

[3] Theodor Bröcker y Klaus Jänich. *Introduction to Differential Topology.* Cambridge University Press, 1982.

Índice alfabético