Tarea de Variable Compleja

Teorema del Residuo, Series de Laurent

Principio del Argumento, y Teorema de Rouche,

Aplicaciones

1. Evalúa las siguientes integrales, usando el teorema del Residuo de Cauchy

$\int_{\|z\|=1} e^{\frac{3}{z}} dz$	$\int_{\|z\|=1} \frac{1}{z^2+4z+13} dz$	$\int_{\|z\|=2} \frac{z}{z^4-1} dz$	$\int_{\|z\|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3} dz$
$\int_{\|z-1\|=2} \frac{\tan z}{z} dz$	$\int_{\|z\|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$	$\int_{\|z\|=1} e^{-\frac{1}{z}} sen\left(\frac{1}{z}\right) dz$	$\int_{\|z-2i\|=6} \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$

2. Demuestra, usando la serie de Taylor, la siguiente versión compleja de la regla de L'Hôpital: Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas, ambas con ceros de orden k en $z = z_0$. Entonces $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad removible, y $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^k(z_0)}{g^k(z_0)}$.
3. Si f es analítica en una región que contiene a un círculo γ y a su interior, y tiene un cero de orden 1 únicamente en $z = z_0$ en el interior o sobre γ, muestra que $z_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$.
4. Suponga que f tiene un cero en $z = z_0$ de multiplicidad k. Muestra que el residuo de $\frac{f'}{f}$ en $z = z_0$, es k.
5. Expande $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en una serie de Laurent, en las siguientes regiones:
    a. $0 < \|z\| < 1$
    b. $1 < \|z\| < 2$
6. **OPTATIVO** Si f es analítica en $0 < \|z - z_0\| < \delta$. Prueba que f tiene orden algebraico m en $z = z_0$ si y solo sí $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m(f(z))$ existe, pero es 0 o ∞.
7. Si f y g tienen orden algebraico h y k respectivamente en $z = z_0$ prueba que
    a. El orden algebraico l de $f \pm g$ satisface $l \leq \max(h, k)$
    b. El orden algebraico de $f \cdot g$ es $h + k$
    c. El orden algebraico de f/g es de $h - k$
8. **OPTATIVO** Sea una función f definida y analítica en$\|z\| > R$ (para cualquier $R > 0$) se dice que tiene una singularidad aislada en ∞, si $f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad removible en $z = 0$ o es analítica en $z = 0$. Similarmente se dice que f tiene un cero en ∞ de orden m, si $f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad removible en $z = 0$ y la función extensión tiene un cero de orden m en $z = 0$. Se dice que f tiene un polo de orden m en $z = \infty$, si $f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene un cero de orden m en $z = 0$. Prueba que
    a. Si f es entera y f tiene una singularidad removible en $z = \infty$, entonces f es constante.
    b. Si f es entera y no tiene una singularidad no esencial $z = \infty$, entonces f es un polinomio.
9. Muestra que una singularidad aislada de una función f es removible cuando alguna de las dos condiciones se cumpla $Re\ f$ o $Im\ f$ este acotado dentro de una vecindad agujerada de la singularidad.
10. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in D$. Sea $f: D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ es analítica. Muestra que f' tiene una singularidad removible en $z = a$, entonces f también tiene una singularidad removible en $z = a$.
11. **OPTATIVO** Si C es una circunferencia unitaria en el sentido positivo, que contiene el origen en su interior y el polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ demuestra que $\int_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{z^{k+1}} dz = 2\pi i a_k$ para toda $k \in [0,1,2, \dots, n]$
12. Utiliza el principio del argumento para evaluar la integral en el contorno cerrado $\mathcal{C}$
    a. $\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+1}{z^2+z}$ si $\mathcal{C} = 2$

b. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+4} dz$ si

c. $\int_{\mathcal{C}}$ cot $z\,dz$ es el contorno rectangular con vértices en $10+i, -4+i, -4-i$ y $10-i$

d. $\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ si $f(z) = \frac{(z-3iz-2)^2}{z(z^2-2z+2)^5}$ si $\mathcal{C} = \|z\| = \frac{3}{2}$ y $\|z\| = 5$

13. Sea f un polinomio. Muestra que la integral $\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \times el\ grado\ de\ f$, donde $\mathcal{C}$ es una circunferencia con centro en el origen y radio suficientemente grande.

14. Encuentra el número de ceros de cada uno de los siguientes polinomios dentro el circulo unitario $\|z\| = 1$
    a. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$
    b. $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$
    c. $27z^{11} - 18z + 10$
    d. $z^8 + 6z + 10$
    e. $z^8 - 6z^6 - z^3 + 2$
    f. $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$

15. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación
    a. $z^4 - 5z + 1$ en el anillo $1 < \|z\| < 2$
    b. $4z^4 - 29z^2 + 25$ en el anillo $2 < \|z\| < 3$
    c. $z^7 + 10z^3 + 14$ en el anillo $1 < \|z\| < 2$
    d. $4z^4 + 2(1-i)z + 1$ en el anillo $\frac{1}{2} < \|z\| < 1$?

16. Sea f una función analítica en el interior del circulo unitario. Supongamos que $\|f(z) - z\| < \|z\|$ en el círculo unitario.
    a. Muestra que $\left\|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leq 8$
    b. Muestra que f tiene un solo cero en el interior de la bola unitaria.

17. Evalúa la integral dada

$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3 + sen\ \theta} d\theta$	$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\ \theta)^2}\ con\ a > 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+2)} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\ x}{x+i} dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\ x}{x} dx$	$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\ x}{(x-1)(x^2+4)} dx$	

18. Con el uso de la Teoría de Residuos, encuentra la inversa de la transformada de Laplace $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ dada

$\frac{1}{s^6}$	$\frac{1}{s^2-3}$	$\frac{e^{-as}}{s^2-5s+6}$ con $a > 0$
$1/(s^2+4)$	$\frac{1}{s^4-1}$	