Tarea 3 de Variable Compleja 1

"Proyección Estereográfica, Derivadas, Analiticidad, Ecuaciones de Cauchy Riemann, Funciones Armónicas"

Proyección Estereográfica.

1. Encuentra la imagen estereográfica de
   a. El ecuador de la esfera ($\gamma = 0$)
   b. El hemisferio norte ($\gamma > 0$)
   c. El hemisferio $\beta > 0$
2. Los puntos de la esfera $z_1{}'$ y $z_2{}'$ están en los extremos opuestos de un diámetro. Prueba que sus imágenes estereográficas z_1 y z_2, satisfacen $z_1 \cdot \overline{z_2} = -1$
3. Define la métrica cordal ρ en $\mathbb{C}^{\#} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, haciendo que $\rho(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ son los puntos correspondientes en la esfera de Riemann y d es la distancia usual entre puntos de $\mathbb{R}^3$, es decir $d(z_1', z_2') = d[(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)] = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2}$
   a. Muestra que $z_n \to z$ en $\mathbb{C}$ si y solo si $\rho(z_n, z) \to 0$
   b. Muestra que $z_n \to \infty$ en$\mathbb{C}$, si y solo si $\rho(z_n, \infty) \to 0$
   c. Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $ad - bc \neq 0$, muestra que f es continua en ∞.

Derivadas

4. Emplea directamente la definición de derivada para demostrar que $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, si $f(z) = \frac{1}{z}$, suponiendo que $z \neq 0$
5. Dime si las siguientes funciones tienen derivadas en algún punto

a. $f(z) = Re(z)$	b. $f(z) = im(z)$	c. $f(z) = \bar{z}$

6. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones

a. $3z^2 + 7z + 5$	b. $f(z) = (1 - 4z^2)^3$	c. $z^4 + 4z$	d. $\frac{3z-1}{3-z}$ si $z \neq 3$
e. $f(z) = \frac{z-1}{2z-1}$ con $z \neq \frac{1}{2}$	f. $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}$ con $z \neq 0$	g. $f(z) = \frac{1}{2iz}$ con $z \neq 0$	h. $f(z) = \left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2+9i}\right)^3$

7. Para $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ diferenciable y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica, con $\gamma([a, b]) \subset U$, prueba que $\sigma = f \circ \gamma$ es diferenciable con n$\sigma'(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$.
8. Demuestra que la función $f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\,\frac{(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \end{cases}$ no es derivable en $z = 0$, haciendo $\Delta z \to 0$, primero a lo largo del eje y luego a lo largo de la recta $y = x$

Condiciones de Cauchy Riemann. Funciones Analíticas

9. Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, establece cuáles de las siguientes funciones son analíticas al menos en un punto y cuáles no

a. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$	b. $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$	c. $f(z) = z^2\bar{z}$	d. $f(z) = \bar{z} \cdot re(z)$

e. $f(z) = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\theta + i\,sen(\frac{1}{2}\theta)\right]$	f. $f(z) = \frac{cos\theta}{r} + isen(\frac{\theta}{2})$	g. $f(z) = 5rcos\theta + r^4cos\theta + i\left(5rsen(\theta) + r^4sen(4\theta)\right)$	h. $f(z) = r^{\frac{m}{n}}(\cos\left(\frac{m}{n}\theta\right) + i\,sen\left(\frac{m}{n}\theta\right))$

10. Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0 \end{cases}$
    a. Muestra que $\frac{f(z)}{z}$ no tiene límite cuando $z \to 0$.
    b. Si $u = re\,(f)$ y $v = im(f)$, muestra que $u(x,0) = x$, $v(x,0) = y\ \ u(0,y) = v(0,y) = 0$
    c. Concluye que las parciales de u y v existen, y que las ecuaciones de Cauchy Riemann se satisface, pero que $f'(0)$ no existe. ¿Contradice esta conclusión el teorema de Cauchy Riemann?
    d. Repite el inciso c), para la función $f(z) = \begin{cases} 1 & en\ los\ ejes\ x\ y\ y \\ 0\ en\ cualquier\ otro\ lado \end{cases}$.
    e. Repite el inciso c), para la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$
11. Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo U y supon que $f^{n+1}(z)$ la derivada de orden (n+1) existe y es 0 en U. Muestra que f es un polinomio de grado n.
12.
    a. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en un conjunto conexo U. Si $au(x,y) + bv(x,y) = c$ en U, donde a, b, c son constantes reales no todas 0, demuestra que f es constante en U
    b. ¿El resultado obtenido en a) es aún valido si a, b, c son constantes complejas?

Funciones Armónicas

13. Verifica que las siguientes funciones son armónicas y dime en qué conjunto son armónicas
    a. $f(z) = z^4$
    b. $u(x,y) = Im\left(z + \frac{1}{z}\right)$
    c. $u(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$
    d. $u(r,\theta) = \frac{1}{r}$
    e. $u(r,\theta) = sen(\theta)$
14. Prueba que $u(x,y)$ $(u(r,\theta))$ es armónica en algún dominio y halla una armónica conjugada $v(x,y)$ $(v(r,\theta))$ cuando
    a. $u(x,y) = 2x(1-y)$
    b. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
    c. $u(r,\theta) = \frac{sen(\theta)}{r^2}$
    d. $u(r,\theta) = r^3 sen\,(3\theta)$
15.
    a. Expresa el operador laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ en coordenadas conjugadas complejas.
    b. *OPTATIVO* Halla una solución de la ecuación diferencial parcial $\nabla^2\phi(x,y) = x^2y$ en todo el plano
    c. *OPTATIVO* Expresar las ecuaciones de Cauchy Riemann en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ, η), donde $x = e^{\xi}\cosh\eta$ y $y = e^{\xi} senh\,\eta$