Tarea de Variable Compleja I

"Algebra y Geometría de Números Complejos"

1. Encuentra y simplifica las siguientes operaciones. Exprésalo en forma polar y exponencial los resultados y también encuentra la parte real e imaginaria de cada inciso.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(1-i)(2-i)(3-i)$ | $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ | $\dfrac{4+3i}{3-4i}$ | $\frac{5-z}{5+z}$ con $z=4+3i$ | $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$ |
| $\dfrac{3+7i}{2+3i}+\dfrac{5-8i}{2-3i}$ | $\dfrac{5}{i}+\dfrac{2}{i^3}-\dfrac{20}{i^{18}}$ | $(\dfrac{i}{3-i})(\dfrac{1}{2+3i})$ | $\dfrac{(4+5i)+2i^3}{(2+i)^2}$ | $\dfrac{i}{1+i}$ |

2. Sea $z=a+bi$. Expresa la cantidad dada en términos de $a$ y $b$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $re(\frac{1}{z})$ | $re(z^2)$ | $im(2z+4\bar{z}-4i)$ | $im(z^2+\bar{z}^2)$ | $re(z^2+\bar{z}^2)$ |

3. Sea $z=a+bi$. Expresa la cantidad dada en términos de la parte real $re(z)$ e imaginaria $im(z)$ de las siguientes expresiones

| | | |
|---|---|---|
| $im\big((1+i)z\big)$ | $re(z^2)$ | $im(z^2)$ |

4. Calcula
    a. $i^{2015}+i^{2000}+i^{1999}+i^{201}+i^{82}+i^{47}$
    b. $E_n=1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n$ para $n\geq 1$
    c. $i^1\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot \ldots \cdot i^{2015}$
    d. $i^{-5}+(-i)^{-7}+(-i)^{13}+i^{-100}+(-i)^{94}$
5. Responde cierto o falso. Si es cierto demuestra o justifica tu respuesta. Si es falso da un contraejemplo
    a. $re\,(iz)=-im(z)$
    b. $re(zw)=re(z)\cdot re(w)$
    c. $\| z-1 \| = \| \bar{z}-1 \|$
    d. Si $z\neq 0$, entonces $Arg(z+\bar{z})=0$
    e. $\arg(\bar{z})=\arg\left(\frac{1}{z}\right)$
    f. $im(iz)=re(z)$
    g. Si $\bar{z}=-z$, entonces $z$ es un imaginario puro.
6. Prueba las siguientes propiedades
    a. Si $z$ y $w$ son dos números complejos se cumple que
        i. $\| 1+\bar{z}w \|^2 - \| z-w \|^2 = (1+\| zw \|)^2 - (\| z \|^2 + \| w \|^2)$
        ii. $\| 1+\bar{z}w \|^2 - \| z+w \|^2 = (1-\| z \|^2)\cdot(1-\| w \|^2)$
    b. Si $z$ y $w\in\mathbb{C}$ con $\| z+w \| = \| z-w \|$ y $w\neq 0$, entonces $\frac{iz}{w}$ es real.
    c. Si $z$ y $w\in\mathbb{C}$ que cumplen que $(1+\| w \|^2)\cdot z=(1+\| z \|^2)\cdot w$, entonces $z=w$ o bien $z\bar{w}=1$
7. Muestra que para números complejos $z, w$ y $r$ son equivalentes
    a. Los puntos $z, w$ y $r$ son colineales
    b. $\frac{r-z}{w-z}\in\mathbb{R}$
    c. $r\bar{w}-r\bar{z}-z\bar{w}\in\mathbb{R}$
    d. $\left\|\begin{matrix}1 & z & \bar{z}\\ 1 & w & \bar{w}\\ 1 & r & \bar{r}\end{matrix}\right\|=0$

    Concluye que la ecuación de la recta que pasa por $w$ y $r$ es $im\left(\frac{a-r}{a-w}\right)=0$

8. ¿Qué podemos decir acerca del número complejo $z$, si $(z)^2 = (\bar{z})^2$?
9. Para todo número complejo $z \neq 0$, muestra que $z, -z, \frac{1}{\bar{z}}, -\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) y\ 0$ son colineales.
10. Encuentra el máximo de $\| z^n + a \|$ para aquellas $\| z \| \leq 1$.
11. Si $w \neq 1$, es la raíz n-ésima de la unidad, muestra que
    a. $1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0$
    b. $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$
12. Prueba la identidad trigonométrica de Lagrange

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\ sen\,\frac{\theta}{2}}$$

    Suponiendo que $sen\ \left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$
13. Encuentra las soluciones de la siguientes ecuaciones
    a. $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$
    b. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
14. Resuelve las ecuaciones
    a. $\| z \| - z = 3 + 4i$
    b. $z^3 = 2 + 11i$, donde $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{Z}$
    c. $iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$
    d. $\| z \| + z = 3 + 4i$
    e. Encuentra todos los números complejos tal que $\| z \| = \| \frac{1}{z} \|$
15. Encuentra el conjunto de todos los números $z \in \mathbb{C}$, que satisface
    a. $Re(z) \geq Im(z)$
    b. $\| z - 1 + 3i \| = 4$
    c. $\| z - 1 + 3i \| < 4$
    d. $\| z - 1 \| + \| z + i \| = 2$
    e. $\| z - 1 + i \| - \| z + 1 - i \| \geq 2$