Tarea de Ecuaciones Diferenciales II

Teorema de Existencia y Unicidad

Marzo 2015

1. Demuestra, calculando las constantes de Lipschitz adecuadas, que las siguientes funciones satisfacen condiciones de Lipschitz en los conjuntos S indicados
   a. $f(x,y) = x^2 \cos x + y\, sen^2(x)$, en S: $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| < \infty$
   b. $f(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$; en S: $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 2$. Donde $(a(x), b(x), c(x)\ son\ funciones\ continuas\ en\ \|x\| \leq 1)$
2.
   a. Demuestra que la función f dada por $f(x,y) = x^2|y|$, satisface una condición de Lipschitz en R: $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$.
   b. Demuestra que $\frac{\partial f}{\partial y}$ no existe en $(x, 0)$ cuando $x \neq 0$.
3. Considera el problema $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$
   a. Encuentra la solución ϕ de este problema (usando el método de separación de Variables).
   b. Dime ¿en qué intervalo existe ϕ?
   c. Demuestra que todas las aproximaciones sucesivas $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, existen para toda $x \in \mathbb{R}$
   d. Demuestra que $\phi_k(x) \to \phi(x)$, para cada x que satisface la condición $|x| \leq \frac{1}{2}$ en R: $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq 1$ entonces $\alpha = \frac{1}{2}$.
4. En el cuadrado R: $|x| \leq 1 \quad |y| \leq 1$, supongamos que f está definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 & |y| \leq 1 \\ 2x & si\ 0 < |x| \leq 1 & -1 \leq y < 0 \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & si\ 0 < |x| \leq 1 & 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & si\ 0 < |x| \leq 1 & x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

   a. Demuestra que f es continua en R y que $|f(x,y)| \leq 2$ en R
   b. Demuestra que f no satisface una condición de Lipschitz en R
   c. Demuestra que las aproximaciones sucesivas $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, para el problema $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$ satisface las condiciones $\phi_0(x) = 0$; $\phi_{2m-1}(x) = x^2$; $\phi_{2m}(x) = -x^2$ con $m = 1,2,\dots$
   d. Demuestra que ninguna de las sub sucesiones convergentes dadas en c. Convergen a una solución del problema con valor inicial.
5. Consideremos la ecuación $y' = (3x^2 + 1)\cos^2 y + (x^3 - 2x) sen\, 2y$ en la franja S_a: $|x| \leq$ a con $a > 0$. Si $f(x,y)$ respeta el miembro derecho de esta ecuación, demuestra que f satisface una condición de Lipschitz en la franja S_a, y que por consiguiente todo problema con valor inicial

$$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0$$

   tiene una solución que existe para toda $x \in \mathbb{R}$.
6. Verifica el corolario del Teorema para el problema con valores iniciales

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1$$

7. Considera el problema $y' = y + \lambda x^2 sen\ y \ \ y(0) = 1$, donde λ es algún parámetro real $|\lambda| \leq 1$
   a. Demuestra que la solución Ψ de este problema existe para $|x| \leq 1$
   b. Demuestra que $|\Psi(x) - e^x| \leq |\lambda|\left(e^{|x|} - 1\right)$.
8. OPTATIVO Una manera distinta de encontrar una solución de una ecuación diferencial es la siguiente: Considera una ecuación diferencial de primer orden $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Con la condición inicial $x(0) = x_0$. La solución $x(t)$ tiene su expresión en series de Taylor, la cual se escribe como

$$x(t) = x_0 + \frac{dx}{dt}(0)t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(0)t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4x}{dt^4}(0)t^4 + \cdots$$

   Ahora, podemos sustituir $\frac{dx}{dt}$ por $f(x)$ usando la ecuación diferencial. Luego podemos substituir $\frac{d^2x}{dt^2}$ por $\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f(x)\frac{dx}{dt} = f_x(x)f(x)$ donde $f_x = \frac{df}{dx}$. Usando está técnica, encuentra la expresión de la serie de Taylor de $x(t)$, en términos de $f(x)$ y de sus derivadas hasta orden 4.