

## *Tarea de Variable Compleja*

### *Topología Básica, Sucesiones, Límites y Continuidad en*

### *Funciones de Variable Compleja.*

1. Este problema es para ver que los números complejos no tiene orden como los números reales.

Recordemos que en los números reales se puede comparar dos números, es decir, que si  $a, b \in \mathbb{R}$  puede suceder que  $a > b$ ,  $b = a$ ,  $b > a$  La pregunta que nos haremos es

¿Podemos extender esta idea para los complejos  $\mathbb{C}$ ? Las propiedades de orden son

$O_1$  Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces se tiene que  $a > b, a = b, b > a$

$O_2$   $a > 0, b > 0$  entonces  $a + b > 0$

$O_3$   $a > 0, b > 0$  entonces  $ab > 0$

Primero define la siguiente relación de orden

Para  $z = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , diremos que  $z > 0$  si y solo si  $\begin{cases} a > 0 \text{ o} \\ a = 0 \text{ y } b > 0. \end{cases}$

Verifica que las propiedades de orden  $O_1$  y  $O_2$  se cumplen pero la propiedad  $O_3$ , no se cumple; para ver esto, verifica que sucede en los puntos  $z = i$  y  $z = -i$ . Se tiene que llegar que  $-1 > 0$ .

2. Prueba que si  $A, B$  subconjuntos de  $\mathbb{C}$  abiertos entonces la intersección de  $A$  y  $B$  es también abierta; y también prueba que si  $A, B$  son subconjuntos cerrados en  $\mathbb{C}$ , entonces la unión es un subconjunto cerrado.
3. Prueba si  $B$  es cerrado sí y solo si  $B^c$  es abierto. Y el caso contrario  $A$  es abierto si y solo si  $A^c$  es abierto.
4. Si  $z_0 \in \mathbb{C}$ , demuestra que el conjunto  $\{z_0\}$  es cerrado.
5. Para los siguientes conjuntos, establece si es o no abierto y si es no es cerrado.

$re(z) < -1$	$2 < im(z) < 6$	$\ z - i\  < 1$
$-1 < re(z) \leq 2$	$re((2 + i)z + 1) > 0$	

6. Los siguientes conjuntos son compactos o no Justifica tu respuesta

- a.  $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < Re(z) \leq 2\}$
- b.  $B = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \|z\| \leq 3\}$
- c.  $C = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 5; |Im(z)| \geq 1\}$

7. Halla la parte real e imaginaria de las siguientes funciones

$f(z) = \bar{z} - iz^2$	$f(z) = \frac{iz + 1}{1 + \bar{z}}$	$f(z) = 2z - 1$
$f(z) = \frac{1}{z}$	$f(z) = e^{\bar{z}^2}$	

8. Demuestra que el límite de las sucesiones es

- a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-i}{n+1} = 1$
- b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n} = 0$
- c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2i}{3n+7i}$

- d. Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , donde  $z_n = x_n + iy_n$  ¿Qué se puede afirmar sobre la existencia de los límites de las sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

9. Usando la definición de límite prueba que

$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z + 1}{z + 2} = 1$	$\lim_{z \rightarrow 3-4i} \ z\  = 5$
---	---------------------------------------

10. Considera el límite  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{re(z)}{im(z)}$

- ¿A qué valor tiende el límite conforme  $z$  tiende a 0 lo largo de la recta  $y = x$ ?
- ¿A qué valor tiende el límite conforme  $z$  tiende a 0 lo largo del eje imaginario?
- En base a sus respuestas de los incisos a) y b). ¿Qué puede decir acerca de

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{re(z)}{im(z)}?$$

11. Considera el límite  $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$

- ¿A qué valor tiende el límite conforme  $z$  tiende a 0 lo largo del eje real?
- ¿A qué valor tiende el límite conforme  $z$  tiende a 0 lo largo del eje imaginario?
- ¿Las respuestas de a) y b) implican que  $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$  existe? Explica
- ¿A qué valor tiende el límite conforme  $z$  tiende a 0 a lo largo de la recta  $y = x$ ?
- ¿Qué puede decir acerca de  $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ ?

12. Calcula los siguientes límites, usando las propiedades

$\lim_{z \rightarrow 1+i} z^2 - 5z + 10$	$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(2z + 3)(z - i)}{(z^2 - 2z + 4)}$	$\lim_{z \rightarrow 2e^{3\pi i}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$
$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - (2 + i)z + 2i}{z - i}$	$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2}$	$\lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{(2z - 3)(4z + i)}{(iz - 1)^2}$

13. Demuestra que las siguientes funciones  $f$  son continuas en el punto dado

$$a. f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z^2 + 2z - 1} & \|z\| \neq 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} & \|z\| = 1 \end{cases}; \text{ en } z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

- $f(z) = \bar{z} - 3re(z) + i$ ; en  $z_0 = 3 - 2i$
- $f(z) = \|z\|$ , es continua para toda  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

14. Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida  $f(0) = 0$ , y  $f(r[\cos \theta + i \sen \theta]) = \sen \theta$  si  $r > 0$ . Muestra que  $f$  es discontinua en 0 pero es continua en cualquier otro punto.

15. Calcula los límites de las siguientes funciones

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + iz - 2}{(1 + 2i)z^2}$	$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$	$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{iz + 1}{2 - i}$
$\lim_{z \rightarrow \left(\frac{i}{2}\right)} \frac{(1 - i)z + i}{2z + i}$	$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^2 + z + 1 - i}$	$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - (2 + 3i)z + 1}{iz - 3}$