Tarea 2

Ecuaciones Diferenciales II

Sistemas de Ecuaciones de Primer Orden, Puntos de Equilibrio y Plano Fase

1. Para los siguientes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Dime el tipo de punto crítico que es el origen y esboza las orbitas en el plano fase
   a. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -5x - 3y \end{cases}$
   d. $\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = -2x + 5y \end{cases}$
   e. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$
2. Para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, localiza los puntos críticos, clasifícalos y esboza las orbitas cerca de cada punto crítico. Usa la información obtenida para crear un dibujo del plano fase completo.
   a. $\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = 5x - 5y \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x' = -2x + y^2 \\ y' = x - 3y + y^2 \end{cases}$
3. Para el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal $\begin{cases} x' = y + kxr^2 \\ y' = -x + kyr^2 \end{cases}$ donde $r^2 = x^2 + y^2$, muestra que el origen es el único punto crítico, y es una espiral estable o una espiral inestable, dependiendo si $k < 0$ o $k > 0$.
4. En este problema vamos a analizar un modelo de epidemias. Sea $x(t)$ el numero de personas sanas y $x(t). \geq 0$ y $y(t)$ el número de personas enfermas con $y(t) \geq 0$. En este modelo no hay decesos. La modelación es la siguiente $\begin{cases} x' = -kxy \\ y' = kxy - ly' \end{cases}$ donde $k, l > 0$
   a. Encuentra y clasifica todos los puntos fijos
   b. Dibuja el plano fase y ¿Qué pasa si $t \to \infty$?
   c. Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ es creciente inicialmente. Bajo ¿qué condiciones la epidemia ocurre?
5. El sistema definido por las ecuaciones $\begin{cases} x' = a + x^2y - (1+b)x \\ y' = bx - yx^2 \end{cases}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es conocido como "Brusselator" (Acrónimo de Oscilador de Bruselas) y se presenta para un modelo de una reacción química. Muestra que el sistema tiene un punto de equilibrio en $\left(a, \frac{b}{a}\right)$. Clasifica el punto de equilibrio en los siguientes casos
   a. $a = 1, b = 2$
   b. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$. Dibuja el plano fase.