Tarea de Variable Compleja

Proyección Estereográfica, Topología Básica, Sucesiones, Limites y Continuidad en Funciones de Variable Compleja.

1. Este problema es para ver que los números complejos no tiene orden como los números reales. Recordemos que en los números reales se puede comparar dos números, es decir, que si $a, b \in \mathbb{R}$ puede suceder que $a > b$, $b = a$, $b > a$ La pregunta que nos haremos es ¿Podemos extender esta idea para los complejos $\mathbb{C}$? Las propiedades de orden son
   O_1 Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que $a > b, a = b, b > a$
   O_2 $a > 0, b > 0$ entonces $a + b > 0$
   O_3 $a > 0$, $b > 0$ entonces $ab > 0$
   Primero define la siguiente relación de orden
   Para $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, diremos que $z > 0$ $si\ y\ solo\ si$ $\begin{cases} a > 0\ o \\ a = 0\ y\ b > 0. \end{cases}$
   Verifica que las propiedades de orden O_1 y O_2 se cumplen pero la propiedad O_3, no se cumple; para ver esto, verifica que sucede en los puntos $z = i$ y $z = -i$. Se tiene que llegar que $-1 > 0$.
2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, demuestra que el conjunto $\{z_0\}$ es cerrado.
3. Para los siguientes conjuntos, establece si es o no abierto y si es no es cerrado.

$re(z) < -1$	$2 < im(z) < 6$	$\lVert z - i \rVert < 1$
$-1 < re(z) \leq 2$	$re\big((2+i)z + 1\big) > 0$	

4. Halla la parte real e imaginaria de las siguientes funciones

$f(z) = \bar{z} - iz^2$	$f(z) = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$	$f(z) = 2z - 1$
$f(z) = \dfrac{1}{z}$	$f(z) = e^{\bar{z}^2}$	

5. Demuestra que el límite delas sucesiones es
   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-i}{n+1} = 1$
   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$
   c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2i}{3n+7i}$
   d. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, donde $z_n = x_n + iy_n$ ¿Qué se puede afirmar sobre la existencia de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ cuando $n \to \infty$?
6. Usando la definición de límite prueba que

$\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{2z+1}{z+2} = 1$	$\lim\limits_{z\to 3-4i} \lVert z \rVert = 5$

7. Considera el límite $\lim\limits_{z\to 0} \frac{re(z)}{im(z)}$
   a. ¿A qué valor tiende el límite conforme z tiende a 0 lo largo de la recta $y = x$?
   b. ¿A qué valor tiende el límite conforme z tiende a 0 lo largo del eje imaginario?
   c. En base a sus respuestas de los incisos a) y b). ¿Qué puede decir acerca de $\lim\limits_{z\to 0} \frac{re(z)}{im(z)}$?

8. Considera el límite $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$
   a. ¿A qué valor tiende el límite conforme z tiende a 0 lo largo del eje real?
   b. ¿A qué valor tiende el límite conforme z tiende a 0 lo largo del eje imaginario?
   c. ¿Las respuestas de a) y b) implican que $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ existe? Explica
   d. ¿A qué valor tiende el límite conforme z tiende a 0 a lo largo de la recta $y = x$?
   e. ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$?
9. Calcula los siguientes límites, usando las propiedades

$\lim_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10$	$\lim_{z\to 2i} \frac{(2z+3)(z-i)}{(z^2-2z+4)}$	$\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$
$\lim_{z\to i} \frac{z^2-(2+i)z+2i}{z-i}$	$\lim_{z\to 2} \frac{z^2-4}{z-2}$	$\lim_{z\to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

10. Demuestra que las siguientes funciones f son continuas en el punto dado
    a. $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2+2z-1} & \|z\| \neq 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \|z\| = 1 \end{cases}$ $;en\ z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ $¿será\ continua?$
    b. $f(z) = \bar{z} - 3\,re\,(z) + i$; en $z_0 = 3 - 2i$
    c. $f(z) = \|z\|$, es continua para toda $z_0 \in \mathbb{C}$.
11. Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida $f(0) = 0$, y $f(r[\cos\theta + i\,sen\,\theta]) = sen\,\theta$ si $r > 0$. Muestra que f es discontinua en 0 pero es continua en cualquier otro punto.
12. Calcula los límites de las siguientes funciones

$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+iz-2}{(1+2i)z^2}$	$\lim_{z\to i} \frac{z^2-1}{z^2+1}$	$\lim_{z\to\infty} \frac{iz+1}{2-i}$
$\lim_{z\to\left(\frac{i}{2}\right)} \frac{(1-i)z+i}{2z+i}$	$\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$	$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2-(2+3i)z+1}{iz-3}$

13. Encuentra la imagen estereográfica de
    a. El ecuador de la esfera $(\gamma = 0)$
    b. El hemisferio norte $(\gamma > 0)$
    c. El hemisferio $\beta > 0$
14. Los puntos de la esfera $z_1{}'$ y $z_2{}'$ están en los extremos opuestos de un diámetro. Prueba que sus imágenes estereográficas z_1 y z_2, satisfacen $z_1 \cdot \overline{z_2} = -1$
15. Define la métrica cordal ρ en $\mathbb{C}^{\#} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, haciendo que $\rho(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ son los puntos correspondientes en la esfera de Riemann y d es la distancia usual entre puntos de $\mathbb{R}^3$, es decir $d(z_1', z_2') = d[(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)] = \sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2 + (\gamma_1-\gamma_2)^2}$
    a. Muestra que $z_n \to z$ en $\mathbb{C}$ si y solo si $\rho(z_n, z) \to 0$
    b. Muestra que $z_n \to \infty$ en$\mathbb{C}$, si y solo si $\rho(z_n, \infty) \to 0$
    c. Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $ad - bc \neq 0$, muestra que f es continua en ∞.