Tarea 3 de Variable Compleja 1

"Derivadas, Analiticidad,

Ecuaciones de Cauchy Riemann, Funciones Armónicas, y Series"

Derivadas

1. Emplea directamente la definición de derivada para demostrar que $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, si $f(z) = \frac{1}{z}$, suponiendo que $z \neq 0$
2. Dime si las siguientes funciones tienen derivadas en algún punto

a. $f(z) = Re(z)$	b. $f(z) = im(z)$	c. $f(z) = \bar{z}$

3. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones

a. $3z^2 + 7z + 5$	b. $f(z) = (1 - 4z^2)^3$	c. $z^4 + 4z$	d. $\frac{3z-1}{3-z}$ si $z \neq 3$
e. $f(z) = \frac{z-1}{2z-1}$ con $z \neq \frac{1}{2}$	f. $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}$ con $z \neq 0$	g. $f(z) = \frac{1}{2iz}$ con $z \neq 0$	h. $f(z) = \left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2+9i}\right)^3$

4. Para $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ diferenciable y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica, con $\gamma([a, b]) \subset U$, prueba que $\sigma = f \circ \gamma$ es diferenciable con n$\sigma'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.
5. Demuestra que la función $f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & z \neq 0 \end{cases}$ no es derivable en $z = 0$, haciendo $\Delta z \to 0$, primero a lo largo del eje y luego a lo largo de la recta $y = x$

Condiciones de Cauchy Riemann. Funciones Analíticas

6. Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, establece cuáles de las siguientes funciones son analíticas al menos en un punto y cuáles no

a. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$	b. $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$	c. $f(z) = z^2\bar{z}$	d. $f(z) = \bar{z} \cdot re(z)$
e. $f(z) = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\theta + i\, sen(\frac{1}{2}\theta)\right]$	f. $f(z) = \frac{cos\theta}{r} + isen(\frac{\theta}{2})$	g. $f(z) = 5rcos\theta + r^4cos\theta + i(5rsen(\theta) + r^4sen(4\theta))$	h. $f(z) = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\left(\frac{m}{n}\theta\right) + i\, sen\left(\frac{m}{n}\theta\right)\right)$

7. Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0 \end{cases}$
   a. Muestra que $\frac{f(z)}{z}$ no tiene límite cuando $z \to 0$.
   b. Si $u = re\,(f)$ y $v = im(f)$, muestra que $u(x, 0) = x$, $v(0, y) = y;\ u(x, 0) = 0;\ \ v(x, 0) = 0$
   c. Concluye que las parciales de u y v existen, y que las ecuaciones de Cauchy Riemann se satisface, pero que $f'(0)$ no existe. ¿Contradice esta conclusión el teorema de Cauchy Riemann?

d. Repite el inciso c), para la función $f(z) = \begin{cases} 1 & en\ los\ ejes\ x\ y\ y \\ 0\ en\ cualquier\ otro\ lado \end{cases}$.

e. Repite el inciso c), para la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$

8. Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo U y supon que $f^{n+1}(z)$ la derivada de orden (n+1) existe y es 0 en U. Muestra que f es un polinomio de grado n.

9.
   a. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en un conjunto conexo U. Si $au(x,y) + bv(x,y) = c$ en U, donde a, b, c son constantes reales no todas 0, demuestra que f es constante en U
   b. ¿El resultado obtenido en a) es aún valido si a, b, c son constantes complejas?

Funciones Armónicas

10. Verifica que las siguientes funciones son armónicas y dime en qué conjunto son armónicas
    a. $f(z) = z^4$
    b. $u(x,y) = Im\left(z + \frac{1}{z}\right)$
    c. $u(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$
    d. $u(r,\theta) = \frac{1}{r}$
    e. $u(r,\theta) = sen(\theta)$
11. Prueba que $u(x,y)$ $(u(r,\theta))$ es armónica en algún dominio y halla una armónica conjugada $v(x,y)$ $(v(r,\theta))$ cuando
    a. $u(x,y) = 2x(1-y)$
    b. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
    c. $u(r,\theta) = \frac{sen(\theta)}{r^2}$
    d. $u(r,\theta) = r^3 sen\,(3\theta)$

12.
    a. Expresa el operador laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ en coordenadas conjugadas complejas.

Series

13. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ converge tanto en el interior como el exterior del círculo unitario y representa una función analítica en cada región
14. Encuentra el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k!}{(k+2)k!}(z-i)^{(2k)}$	

15. Calcula la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados
    a. $sen\, z^2$ en $z_0 = 0$
    b. e^{2z}, en $z_0 = 0$.