Tarea de Variable Compleja II

Teoremas de Cauchy, Morera, y de Liouville

1. Sea $f(z)$ una función analítica en el conjunto R^*, que se obtiene al omitir un número finito de puntos interiores $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ del rectángulo R.
   Prueba que
   $$\int_{Front(R)} f(z)dz = 0$$
   dado que $\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0$.
2. Sea $f(z)$ una función analítica en el conjunto D, que se obtiene al quitar los puntos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ de $\|z - z_0\| < r$. Prueba que
   $$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
   Para cualquier curva γ cerrada en $\|z - z_0\| < r$, dado que $\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0$ con $k = 1,2,3, \ldots, n$
3. Muestra que la afirmación del ejercicio anterior permanece cierta si D se obtiene al omitir un número infinito de puntos $z_1, z_2, z_3, \ldots$, que no tienen puntos de acumulación en $\|z - z_0\| < r$.
4. Prueba que la composición de funciones homotópicas son homotópicas
5. Sean $f_0, f_1 : X \to Y$, funciones homotópicas y $A \subset X$, entonces las funciones restringidas al subconjunto A también son homotópicas, $f_0 \restriction_A$ y $f_1 \restriction_A$ son homotópicas.
6. Sean f una función analítica en un dominio simplemente conexo D y z_1 y z_2 dos puntos que están en el interior de una curva cerrada simple γ que tiene sentido de orientación positiva y está dentro de D. Muestra que
   $$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)(z_2)} dz$$
   ¿Qué pasa si $z_2 \to z_1$?
7. Los polinomios de Legendre están definidos como $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} [z^2 - 1]^n \right)$. Con la fórmula Integral de Cauchy, verifica que
   $$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{((m^2 - 1)^n)}{2^n (m - z)^{n+1}} dm$$
   donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple que tiene orientación positiva y $z \in Int(\mathcal{C})$.
   También verifica que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$
8. Utilizando las fórmulas Integrales de Cauchy. Evalúa la integral dada a lo largo del contorno cerrado indicado

$\int_\gamma \frac{4}{z - 3i} dz$; $\|z\| = 5$	$\int_\gamma \frac{e^{(z)^2}}{(z - i)^3} dz$; $\|z - i\| = 1$	$\int_\gamma \frac{2z + 5}{z^2 - 2z} dz$; $\|z - 3\| = 2$

$\int_\gamma \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3}\right) dz$; $\|z-2\| = 1$	$\int_\gamma \frac{1}{z^3(z-1)^2} dz$; $\|z-2\| = 5$	

9. Considera la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$
   a. Se satisface que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada γ (que no pase a través del origen), pero no es analítica en $z = 0$ ¿Contradice esta afirmación el teorema de Morera?
   b. La función f está acotada conforme $z \to \infty$, pero no es constante. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Liouville?
10. La función $f(z)$ es analítica es todo el plano complejo, e $imf \leq 0$. Demuestra que f es una constante.
11. Haciendo uso del Teorema de Morera; muestra que $f(z) = \int_0^\infty \frac{(e^{zt})}{1+t} dt$ es una función analítica en el semiplano izquierdo $L = \{z \in \mathbb{C}: Re\ (z) < 0\}$.
12. Sea $f(z) = az^n + b$, donde la región es el disco $R = \{z: \|z\| \leq 1\}$. Muestra que $\max_{\|z\| \leq 1} \|f(z)\| = \|a\| + \|b\|$
13. Muestra que $\cos z$ no es una función acotada.
14. Sea $f(z) = z^2$. Evalúa lo que se te pide, donde R representa la región rectangular definida por el conjunto $R = \{z = x + iy: 2 \leq x \leq 3\ y\ 1 \leq y \leq 3\}$
   a. $\max_{z \in R} \|f(z)\|$
   b. $\min_{z \in R} \|f(z)\|$
   c. $\max_{z \in R} Re\left(f(z)\right)$
   d. $\min_{z \in R} Im\ \left(f(z)\right)$
15. Sea f una función entera que cumple $\|f(z)\| \leq \frac{1}{\|Im\ (z)\|}$ para $\|z\|$ suficientemente grande. Entonces muestra que $f \equiv 0$.
16.
   a. Sea $u(x, y)$ una función armónica para toda (x, y). Muestra que

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta\,, y_0 + R\ sen\ \theta) d\theta$$

   donde $R > 0$. *SUGERENCIA: TOMA* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$*, DONDE* v *ES LA ARMÓNICA CONJUGADA DE* u*.*
   b. Establece el principio del máximo para funciones armónicas. Sea $u(x, y)$ una función armónica y no constante en un dominio D simplemente conexo. Entonces u no alcanza su máximo valor en cualquier punto $(x_0, y_0) \in D$.
17. Sea $f(z)$ una función analítica y no constante en el disco cerrado de radio 1, es decir, $\|z\| \leq 1$. Supongamos que $\|f(z)\| = K$ para toda z que esta en $\|z\| = 1$. Muestra que $f(z)$ tiene un cero en el disco unitario.