PRIMERA TAREA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Propiedades de Campo y Conjuntos

1. Dada una función $f: A \to B$
   a. Prueba que se tiene que $f(X - Y) \supseteq f(X) - f(Y)$, donde los subconjuntos X y Y forman parte de A.
   b. Muestra que si f es inyectiva, entonces $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ para cualesquiera subconjuntos X y Y contenidos en A.
2. Un elemento $a \in \mathbb{N}$ se llama antecesor de $b \in \mathbb{N}$, cuando se tiene que $a < b$ y no existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Prueba que excepto el $1 \in \mathbb{N}$, todo natural posee un antecesor.
3. Sea un conjunto con n elementos. Determina el número de funciones inyectivas. $f: I_p \to X$. Donde $I_p = \{a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq p\}$.
4. Sea el conjunto $\mathbb{Q}(t)$ de las funciones racionales $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, donde $p(t)$ y $q(t)$ son polinomios con coeficientes racionales, siendo $q(t)$ no idénticamente nulo. Si $u(t)$es también no idénticamente no nulo, se tiene $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t)\cdot u(t)}{q(t)\cdot u(t)}$. Con las operaciones definidas como
$$r(t) + s(t) = \frac{\big(p(t)\big)\cdot\big(u(t)\big)}{q(t)\cdot u(t)} + \frac{p_1(t)\cdot u_1(t)}{q_1(t)\cdot u_1(t)} = \frac{p(t)\cdot q_1(t)\cdot u(t)\cdot u_1(t) + p_1(t)\cdot q(t)\cdot u_1(t)\cdot u(t)}{q(t)\cdot q_1(t)\cdot u(t)\cdot u_1(t)}$$
$$r(t)\cdot s(t) = \frac{\big(p(t)\big)\cdot\big(u(t)\big)}{q(t)\cdot u(t)}\cdot\frac{p_1(t)\cdot u_1(t)}{q_1(t)\cdot u_1(t)} = \frac{p(t)\cdot p_1(t)\, u(t)\cdot u_1(t)}{q(t)\cdot q_1(t)\cdot u(t)\cdot u_1(t)}$$
   Y prueba que este conjunto es un campo ordenado si definimos el conjunto P cuando una fracción $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \in P$, si en el polinomio $p(t)\cdot q(t)$, el coeficiente del término de mayor grado es positivo.
5. (OPTATIVO) Sean $A,\ B$ campos, una función $f: A \to B$, se llama un homomorfismo cuando se tiene que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$, para cualquiera $x, y \in \mathbb{K}$
   a. Dado un homomorfismo $f: A \to B$, prueba que $f(0) = 0$
   b. Prueba también o que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$ o entonces $f(1) = 1$ y f es inyectivo.
6. (OPTATIVO) Sea p un numero natural primo. Para cada entero m, indiquemos como $\overline{m}$ al residuo de la división $\frac{m}{p}$. El conjunto $\mathbb{Z}_p = \{0,1,2,3,\dots,p-1\}$. Definimos las dos operaciones una suma $a \oplus b = \overline{a+b}$ y una multiplicación $a \otimes b = \overline{a\cdot b}$. Prueba que una función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ definida como $f(n) = \overline{n}$, cumple que $f(m+n) = f(m) \oplus f(n)$ y $f(m\cdot n) = f(m) \otimes f(n)$. Concluye que $\oplus$ y $\otimes$ son conmutativas, asociativas y también cumple la propiedad distributiva y existen 0 y 1. Observa que dados $m, n \in \mathbb{Z}_p$ $m \odot n = 0$, entonces $m = 0$ o $n = 0$. Concluye que $\mathbb{Z}_p$ es un campo.
7. Dados a, b, ϵ números de un campo ordenado $\mathbb{K}$, prueba que $|a - b| < \epsilon \Leftrightarrow |b| - \epsilon < |a| < |b| + \epsilon$. Para concluir que $|a - b| < \epsilon \Longrightarrow\ a < |b| + \epsilon$.
8. Si $a, b \in \mathbb{K}$, un campo ordenado y $a^2 + b^2 = 0$, demuestra que $a = b = 0$.
9. Prueba que un cuerpo ordenado y arquimediano, se tiene que se cumple que para todo $\epsilon > 0$ en $\mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$
10. Prueba que en un campo ordenado $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes
    i. $\mathbb{K}$ es arquimediano
    ii. $\mathbb{Z}$ es no acotado superiormente ni inferiormente.
    iii. $\mathbb{Q}$ es no acotado superiormente ni inferiormente.
11. Demuestra
    a. Si $a \in \mathbb{K}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^n \cdot a^m$ usando la inducción matemática
    b. Si $a \in \mathbb{K}$ y $a \neq 0$, y $m, z \in \mathbb{Z}$, entonces $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

12.

a. Si $n \in \mathbb{N}$, demuestra que $n^2 \geq n$ y por lo tanto $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

b. Supongamos que $c > 1$, $c \in \mathbb{K}$, campo ordenado demuestra que $c^n \geq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (SUGERENCIA $c = 1 + a$, CON $a > 0$).

c. Demuestra que si $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$, entonces $|x - y| \leq b - a$. Da una interpretación geométrica.

d. Si x, y, z pertenecen a un campo ordenado, entonces $x \leq y \leq z$ si y solo si $|x - y| + |y - z| = |x - z|$.

e. Grafica los puntos (x, y) en el plano $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ es un campo ordenado) para los cuales

   i. $|y| = |x|$

   ii. $|x| + \lceil y \rceil = 1$

13. Sean a, b números racionales positivos. Prueba que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es racional si y solo si $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son racionales. (SUGERENCIA MULTIPLICA POR $\sqrt{a} - \sqrt{b}$).

14.

a. Si x, y son positivos con $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$. ¿qué interpretación geométricamente se puede dar?

b. Si x, y son positivos con $xy = 1$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = 1$.

c. Para cualquier número positivo x, se tiene que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, este hecho úsalo para demostrar: Si $a, b > 0$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, la igualdad se da si y solo sí $a = b$.

d. Si $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, demuestra que $n(n+1)^{\frac{1}{n}} = n + H_n$ para $n \geq 2$

e. Si x, y, z son reales positivos y n es un entero positivo, se cumple

$$x^n(x - y)(x - z) + y^n(y - z)(y - x) + z^n(z - x)(z - y) > 0$$

15. Sea $X \subset \mathbb{R}$ (Campo ordenado y arquimediano) no vacío, acotado superiormente y $c \in \mathbb{K}$. Teniendo que $c \leq \sup X$ si y solo sí para cada $\epsilon > 0$ real, dado se puede encontrar un $x \in X$, tal que $c - \epsilon < x$. Enuncia y demuestra un resultado análogo con el infimo en vez del supremo.

16. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, no vacíos y acotados superior e inferiormente, Sea $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Prueba

a. $A + B$ es acotado.

b. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

d. Enuncia y demuestre los resultados análogos suponiendo que solo están acotados superiormente y si están acotados solamente inferiormente.

17. Si $P \subset Q \subset \mathbb{R}$, $P \neq \emptyset$, y P y Q son acotados superiormente. Muestra que $\sup P \leq \sup Q$.

18. Sea $S = \{x : x^3 < 1\}$. Encuentra el $\sup S$. ¿Es acotado inferiormente?

19. Si $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión nidificada de celdas cerradas, demuestra que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \ldots \leq a_n \leq b_m \leq \cdots \leq b_2 \leq b\_1$$

Si se toma $\xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\eta = \inf\{b_m : m \in \mathbb{N}\}$, demuestra que $[\xi, \eta] = \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$