

Tarea de Cálculo Diferencial e Integral I

“Propiedades de Campo, Desigualdades, y Valor Absoluto”

1. Prueba que si $a, b, c \in \mathbb{R}$
 - a. $-0 = 0$
 - b. $-(a + b) = -a - b$
 - c. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$
 - d. $1^{-1} = 1$
 - e. Si $ab \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
 - f. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$
 - g. Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
 - h. Si $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$
 - i. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si ad/bc con $bd \neq 0$
 - j. Optativo Demuestra que $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. Como $2 < 4$ podemos concluir que $\sqrt{2} < 2$, prueba que
 - a. $\sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$
 - b. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
3. Prueba que

$$\sqrt{2} < \sqrt{3}$$
4.
 - a. Para números reales a y b , Si $a > b$, muestra que $a^2b < ab^2 + \frac{a^3+b^3}{3}$
 - b. Sean a, b números reales con $0 \leq a \leq b \leq 1$, verifica que $0 \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$
 - c. Sean a, b números reales positivos con $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, muestra que $\frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{b(b-1)} \geq 1$
 - d. Sean a, b números reales positivos con $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{b(b+1)} \leq \frac{1}{2}$
 - e. Para $a, b > 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
 - f. Para $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$
 - g. Para números reales a, b, c muestra que

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b - c| - |c - a| + |a + b + c| \geq 0$$
5. Prueba que
 - a. Que el más grande de dos reales, u y v , está dado por $\max(u, v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}$
 - b. Que el menor de dos reales u y v , está dado por $\min(u, v) = \frac{u+v-|u-v|}{2}$
6. Halla una fórmula para
 - a. El máximo de tres números reales u, v, w
 - b. El mínimo de tres números reales u, v, w
7. Para cada uno de los incisos halla todos los reales que satisfacen la desigualdad o la igualdad dada

$ x - 3 < 7$	$x^2 - x + 4 < 10$	$(x - 1)^2 < 4$	$ 7x - 3x \leq 0$	$\sqrt{ x - 1} \geq a$ > 0
$ x + 1 < 1$	$x^2 + x + 4 > 10$	$(x - 2)^2 + 3 < 12$	$ x ^2 - 4 x - 1 = 0$	$\left(\frac{1}{x-2}\right)$ $-\left(\frac{1}{1-x}\right) > 0$
$ 2x - 5 < 4$	$x(1 - x) > 1$	$x^2 - x + \left(\frac{9}{4}\right) < 3$	$\left \frac{2}{x}\right \geq \frac{x}{5}$	$\frac{1}{x} > 3$
$ x - 3 \leq 2$	$x^2 + 2x < -2$	$2x^2 + 3x - 2$ $< x^2 + x + 1$	$x^4 < 2x^2 + 3$	$ 3x + 2 \geq 6$

8. Si $|a| = |b|$, calcula $\frac{|a+b| - |a^2 - b^2|}{|ab| + ab + |a^2 + b^2|}$
9. ¿En que se simplifica la expresión
- $\frac{|x|}{x}$?
 - $\frac{x+|x|}{2}$?
 - $\frac{x-|x|}{2}$?
10. La temperatura se puede medir en grados Celsius o grados Fahrenheit, la relación entre ambas escalas de temperatura es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es el valor numérico de una temperatura en grados Celsius y F lo es en grados Fahrenheit. ¿Cuál es el intervalo de temperatura en grados Fahrenheit correspondiente al intervalo $7 < c < 55$? ¿El punto medio de dicho intervalo de temperaturas corresponde al punto medio del intervalo en grados Fahrenheit?, Justifica tu respuesta.
11. Para cada uno de los siguientes intervalos encuentra el centro y el radio correspondiente
- $(-1, 2)$
 - $(-2, 5)$
 - $(a + c, b + c)$
 - $\left(\frac{h-1}{h}, \frac{h+1}{h}\right)$
 - $(1 - r, 1 + 2r)$
12. Describe cada uno de los siguientes intervalos, mediante una desigualdad de la forma $|x - a| < r$ o $|x - a| \leq r$
- $(-4, -2)$
 - $[0, 6]$
 - $[-1, 3]$
 - $[5, 15]$
 - $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
13. Muestra que si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números reales positivos entonces
- $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n|$ (desigualdad triangular generalizada)
 - $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n}$
- 14.
- Sea $a_i > 0$ con $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$. Muestra que
- $$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

b. Si $a > 1$, entonces $a^n - 1 > n \cdot \left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right)$

15. Para números reales positivos a y b

a. Si $\sqrt{b} < a$ muestra que se tiene que

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

b. Encuentra el valor de

i. $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a} \dots}}}$

ii. $\sqrt{a \sqrt{b \sqrt{a \sqrt{b \sqrt{a \sqrt{b} \dots}}}}}$

16. Optativos

a. Si $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$, verifica que $n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n + H_n$ con $n \geq 2$

b. Considera la “ecuación formal” con un numero infinito de radicales $x =$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}}, \text{ ¿cuál es el valor de } x?$$

c. Considera la “ecuación formal” con un numero infinito de radicales $y =$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}}, \text{ prueba que para } x \geq 0, \text{ y esta dada por } y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

d. Obtén el valor de $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ y prueba que satisface la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0. \text{ ¿cuál es el valor de } \Phi?$$

i. Considerando que Φ cumple la ecuación $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, es decir $\Phi^2 = \Phi + 1$, prueba que $\Phi^3 - 2\Phi + 1 = 0$

ii. Prueba que $\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$