

Tarea de

“Límites y continuidad”

1. Da la definición ϵ y δ para cada proposición
 - a. $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = M$
 - b. $\lim_{z \rightarrow d} h(z) = P$
 - c. $\lim_{a \rightarrow b} g(a) = L$
2. Explica por qué son correctas las siguientes definiciones de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$: Para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo x
 - a. Si $0 < |x - a| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.
 - b. Si $0 < |x - a| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta$.
 - c. Si $0 < |x - a| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| < 5\delta$.
 - d. Si $0 < |x - a| < \frac{\epsilon}{10}$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.
3. Proporciona ejemplos que demuestres que las siguientes definiciones de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ no son correctas
 - a. Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$
 - b. Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |f(x) - l| < \epsilon$, entonces $0 < |x - a| < \delta$
4.
 - a. Si $f(x) = x^3$, halla la $\delta > 0$ tal que se cumpla $|f(x) - a^3| < 0.001$, siempre que $|x - a| < \delta$
 - b. Si $f(x) = x^4 + 2$, halla la $\delta > 0$ tal que se cumpla $|f(x) - f(a)| < 0.1$, siempre que $|x - a| < \delta$.
5. Proporciona una prueba con ϵ y δ para cada límite dado
 - a. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 21} (3x - 1) = -64$
 - c. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$
6.
 - a. Proporciona un ejemplo que pueda existir $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ sin que necesariamente existan los $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 - b. Prueba que si existen $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 - c. Proporciona un ejemplo que pueda existir $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ sin que necesariamente existan los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 - d. Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, se puede afirmar que necesariamente existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$?
7. Encuentra los límites indicados o establezcan que no existe

$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{23}{s^2 + 19}$	$\lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^3 + 8z^2}{-27}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \left(\frac{3}{1-x^3} \right) \right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1+x}$	$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x(x-2)^2)} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right]$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 - x}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x \tan x - \frac{\pi}{\cos x})$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^n}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)}{x}$

8. Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para toda x . Supon que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, prueba que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

9. Calcula los siguientes limites utilizando limites laterales

a. $\lim_{x \rightarrow 2} |5 - 3x|$

b. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 8 - x - x^2 & \text{si } x \geq -4 \\ \frac{2+x}{x} & \text{si } x < -4 \end{cases}$

10. Determina en que números la función es continua e indica la razón

a. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b. $F(t) = \frac{t^3 + 7}{t^2 - 4}$

c. $f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+1} & \text{si } s \leq 1 \\ \frac{1}{3-s} & \text{si } s > 1 \end{cases}$

d. $h(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & \text{si } x < 0 \\ x - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e. $g(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11. Construye un ejemplo de una función f definida en $\mathbb{R}$, discontinua en todos los reales, tal que $|f|$ sea continua en $\mathbb{R}$

12. Prueba que

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

b. Si $n \geq m$, existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ y ¿cuánto vale?

c. Si $n = m$, existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ y ¿cuánto vale?

13. Halla las ecuaciones de las asíntotas de los gráficos correspondientes a las funciones

a. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 + x}$

b. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

14. Determina los valores de las constantes c y k que hagan a la función continua en todo número. Dibuja la gráfica de la función resultante.

a. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

c. $g(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx + k & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

15. La función de demanda de un cierto bien es $D(q) = \frac{90-5q}{q-6}$

- ¿Qué tipo de función es?
- ¿Cuál es su dominio para que tenga sentido económico? (sea mayor que cero)
- ¿Tiene asíntotas? ¿Cuáles?