Probabildiad II	2020-2

Lecture : Distribuciones de Funciones de Vectores Aleatorios

Lecturer: F. Baltazar-Larios *Scribe:*

1. Estadísticas de Orden

Consideremos que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ estarán definidas todas las variables aleatorias consideradas en este documento.

Definición 1.1. *Una colección finita de v.a.i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ es llamada muestra aleatoria (m.a.) (n es tamaño de la muestra).*

Nota 1.1. *Para cada $\omega \in \Omega$ tenemos que $X_i(\omega) := x_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, n$.* ***Notación:*** *X denota a la v.a. y x a la evalución de un punto muestral ω en X.*

Ejemplo 1.1. *Supongamos que se lanzan de forma independiente tres dados identificables. Sea $X_i =$ el resultado obtenido en el i-ésimo dado.*

Tenemos que la colección finita de v.a.i.i.d. X_1, X_2, X_3 es un m.a. de tamaño 3 con distribución Uniforme en $\{1, \ldots, 6\}$. Si se realiza el experimeto aleatorio y obtenemos $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = 2$ entonces tenemos que $X_1(\omega_1) = x_1 = 4$, $X_2(\omega_2) = x_2 = 1$ y $X_3(\omega_3) = x_3 = 2$.

Definición 1.2. *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible, entonces decimos que la función $f(X_1, \ldots, X_n)$ es una* ***estadística*** *de la m.a.*

Ejemplo 1.2. *Si en el Ejemplo 1.1 definimos a $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{X_i}{3}$ entonces tenemos que $f(4,,1,2) = \frac{7}{3}$.*

Si tenemos una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ y evaluamos cada v.a. en un elemento del espacio muestral (ω) obtenemos una colección un vector en $\mathbb{R}^n$. En particular, esos reales pueden ser ordenados de menor a mayor (con repetición), si $X_{(i)}(\omega)$ representa el i-ésimo real una vez que fueron ordenados, tenemos $X_{(1)}(\omega) \leq \ldots X_{(n)}(\omega)$.En el Ejemplo 1.1 tenemos que $x_{(1)} = 1, x_{(2)} = 2$ y $x_{(3)} = 4$.

Si variamos el argumento (ω) obtenermos una la siguiente sucesión de variables aleatorias.

Definición 1.3. *Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a., definimos a sus **estadísticas de orden** como*

$$\begin{aligned}
X_{(1)} &= \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}\\
X_{(2)} &= \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}-\{X_{(1)}\}\\
X_{(3)} &= \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}-\{X_{(1)},X_{(2)}\}\\
&\vdots\\
X_{(n)} &= \text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\}.
\end{aligned}$$

A $X_{(i)}$ la llamaremos i-ésima estadística de orden de la m.a., $i=1,\ldots,n$.

Nota 1.2. *Una observación importante es que $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ no es una colección de v.a. independientes.*

Proposición 1.1. *Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. con función de densidad f y función de distribución F. La función de densidad de la i-ésima estadística de orden está dada por*

$$f_{X_{(i)}}(x)=\binom{n}{i}if(x)[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}.$$

Proof. Para cada $i\in 1,\ldots,n$ definamos la v.a.

$$Y_i=1_{(-\infty,x]}(X_i)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad X_i\leq x\\ 0 & \text{si} \quad X_i>x.\end{cases}$$

Tenemos que $Y_i\sim \text{Bernoulli}(F(x))$, entonces $S_n:=\sum_{i=1}^n Y_i\sim \text{Bin}(n,F(x))$. Entonces

$$\begin{aligned}
F_{X_{(i)}}(x) &= \mathbb{P}(X_{(i)}\leq x)\\
&= \mathbb{P}(S_n\geq i)\\
&= \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k},
\end{aligned}$$

derivando con respecto a x se obtiene la función de densidad. **Ejercicio Extra (EE) 1:** Derivar y obtener la función de densidad.

□

Corolario 1.1. *Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. con función de densidad f y función de distribución F. La función de densidad de la mínima y máxima estadística de orden están dadas por*

$$f_{X_{(1)}}(x)=nf(x)[1-F(x)]^{n-1}$$

y

$$f_{X_{(n)}}(x)=nf(x)[F(x)]^{n-1}.$$

En las Figuras 1 y 2 se ilustra la función de densidad de una m.a. para variables aleatorias como las del Ejemplo 1.1 para las mínima y máxima estadísticas de orden.

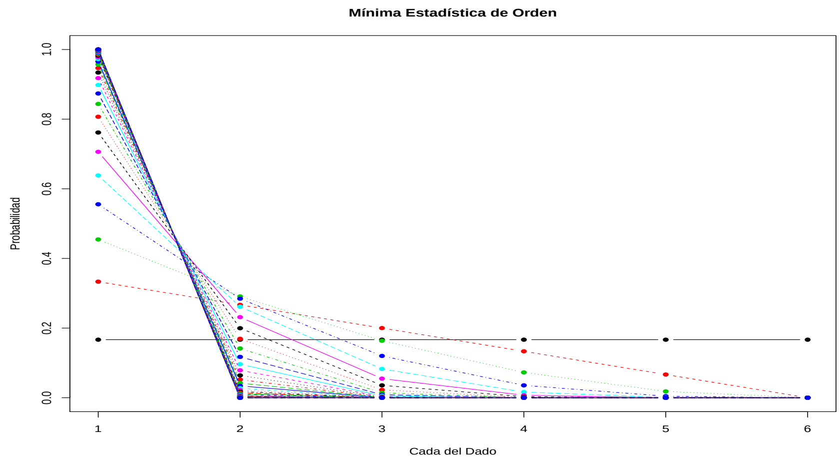

FIGURE 1. Función de densidad para n=1:100

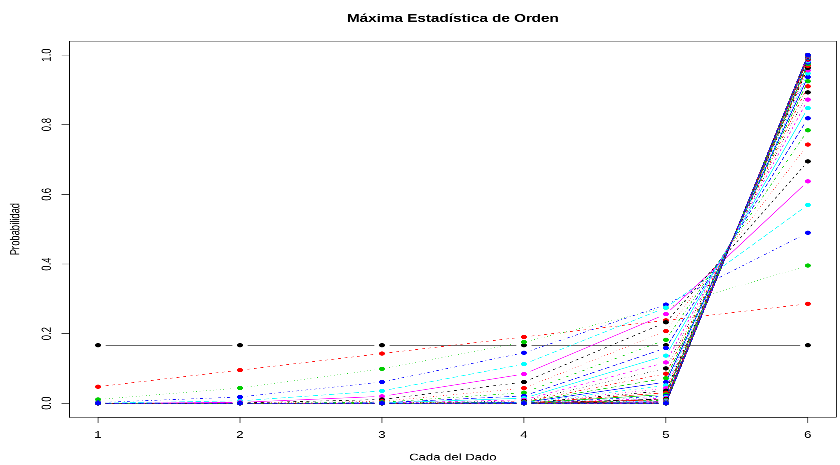

FIGURE 2. Función de densidad para n=1:100

Dada la m. a. $X_1, \ldots, X_n$ una estadística de interés es la medida de "distancia" entre la mínima y máxima estadísticas de orden conocida como rango y definida por $R_n := X_{(n)} - X_{(1)}$.

Proposición 1.2. *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. con función de densidad f y función de distribución F. La función de densidad de su rango está dada por*

$$f_{R_n}(x) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x+y)[F(x+y)-F(y)]dy \quad y \geq 0.$$

Proof. Primero calcularemos la función de distribución del vector aleatorio $(X_{(1)}, X_{(n)})$ y con ésta su correspondiente función de densidad.

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x_1, X_{(n)} \leq x_2) \\
&= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x_2) - \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x_2, X_{(1)} > x_1) \\
&= [F(x_2)]^n - \mathbb{P}(x_1 < X_1 \leq x_2, \ldots, x_1 < X_n \leq x_2) \\
&= [F(x_2)]^n - [F(x_2) - F(x_1)]^n.
\end{aligned}$$

Derivando tenemos que

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1,x_2) = n(n-1)f(x_1)f(x_2)[F(x_2)-F(x_1)]^{n-2}.$$

Por el Ejercicio 1.1 tenemos que

$$f_{R_n}(x) = n(n-1)\int_{\mathbb{R}} f(u)f(x+u)[F(x+u)-F(u)]^{n-2}du.$$

EE2: Derivar y obtener esta función de densidad. □

Ejercicio 1.1. *Dado que el vector aleatorio (X,Y) tiene función de densidad $f_{(X,Y)}$, probar que la función de densidad de la estadística $Z = Y - X$ está dada por*

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, z+u)du.$$

Ejercicio 1.2. *Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. con función de densidad f y función de distribución F. Calcular la función de densidad conjunta de las n estadísticas de orden. Para este objetivo deben obtener, primero, obetener la expresión genérica para una muestra de tamaño n y después probar que es válida.*

2. Transformaciones de Vectores Aleatorios

Consideremos el vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ con función de densidad $f_{\boldsymbol{X}}$ y a la función medible $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, entonces $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ es un k vector aleatorio, si $k=1$ entonces $\boldsymbol{Y}$ es una variable aleatoria.

Teorema 2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio continio con soporte $S_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^n$ y con función de densidad $f_{\boldsymbol{X}}$. Sea $g : S_{\boldsymbol{X}} \to \mathbb{R}^n$ una función continua con inversa g^{-1} diferenciable. Entonces el vector $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ tiene soporte en $g(S_{\boldsymbol{X}})$ y función de densidad*

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(y_1,\ldots,y_n))|J(y_1,\ldots,y_n)| & \textit{si} \quad (y_1,\ldots,y_n) \in g(S_{\boldsymbol{X}}) \\ 0 \quad \textit{en otro caso}, \end{cases}$$

donde

$$J(y_1,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}. \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con función de densidad dada por*

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad -1 \le x_1+x_2, \le 1, -1 \le x_1-x_2, \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y definimos a $\boldsymbol{Y} = (X_1+X_2, -X_1+X_2)$.

Método 1: Podemos escribir

$$\boldsymbol{Y}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}^t = A\boldsymbol{X}^t.$$

Entonces la transformación invesa está dada por

$$\boldsymbol{X}^t = A^{-1}\boldsymbol{Y}^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}^t.$$

Entonces tenemos que

$$|J(y_1,y_2)| = |\det(A^{-1})| = 1/2,$$

y

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,y_2) = f_{\boldsymbol{X}}((A^{-1}(y_1,y_2)^t)^t)(1/2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad -1 \le y_1, y_2 \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Método 2: Tenemos que $\boldsymbol{Y} = (y_1,y_2) = g(\boldsymbol{X}) = (x_1+x_2, x_2-x_1)$, entonces $g^{-1}(\frac{y_1-y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$,

$$f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(y_1,y_2)) = \frac{1}{2} \quad -1 \le y_1, y_2 \le 1$$

y

$$J = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2. \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,y_2) = f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(y_1,\ldots,y_n))|J(y_1,\ldots,y_n)| = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad -1 \le y_1, y_2 \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.1. *Sean $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ (idependientes), encontrar la función de densidad de X_1+X_2 y X_1X_2.*