Miscelánea Matemática **60** (2015) 1-23 SMM

Breve historia del *Ars Conjectandi*

Carmen Martínez–Adame
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, U.N.A.M.
cmadame@gmail.com

> Comment oser parler des lois du hasard?
> Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi?
> – Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités.*

El surgimiento de una rama de las matemáticas viene siempre, y de manera necesaria, acompañado de un nuevo objeto matemático; el objeto que será precisamente el objeto de estudio de esa nueva rama. De esta manera consideramos que el surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad se da cuando la probabilidad se vuelve un objeto de estudio por sí mismo y deja de ser simplemente una técnica utilizada para comprender algunos juegos de azar.

Es usual decir que la probabilidad vista de esta forma surgió en los trabajos de Pascal y Fermat y aunque nosotros no suscribimos plenamente esta visión no será nuestro objetivo en este artículo rebatirla, nuestro interés principal es el de contar la historia de un texto en el cual la probabilidad se aprecia como una teoría matemática, útil, viva y moderna. Un texto que acaba de celebrar su tricentésimo aniversario, el *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli.

Consideramos que para poder comprender plenamente la importancia y el significado del trabajo de Jacob Bernoulli es necesario conocer y entender los conceptos de probabilidad que existían previos a su contribución. Por tanto, en la siguiente sección nuestro objetivo será rastrear el desarrollo de estos conceptos a lo largo del siglo XVII. Sin embargo, nos parece importante señalar que nuestro objetivo no es hacer una historia completa de la teoría de la probabilidad a lo largo de este siglo.

Por otro lado es importante notar que el concepto de probabilidad ha cambiado con el transcurso del tiempo y ha tenido varios significados. Jacob Bernoulli proporciona una definición de este término que sintetiza el desarrollo de este tema y a que a su vez establece las condiciones necesarias para el estudio matemático del mismo.[1]

[1] Ver [5, p. 211]. [La probabilidad, en efecto, es un grado de certeza y difiere de ésta como la parte difiere del todo. En verdad, si la certeza completa y absoluta, que representamos con la letra a o 1, es supuesta, digamos, de estar compuesta de cinco partes o probabilidades, de las cuales

> *Probabilitas* enim eſt gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum ſi certitudo integra & abſoluta, quam litera *a* vel unitate 1 deſignamus, quinque verb. gr. probabilitatibus ceu partibus conſtare ſupponatur, quarum tres militent pro exiſtentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere $\frac{3}{5}a$, ſeu $\frac{3}{5}$ certitudinis.

1. La probabilidad durante los años previos a la publicación del *Ars Conjectandi*

Los juegos de azar existen desde la antigüedad pero la teoría de la probabilidad no. Como mencionamos en la Introducción creemos que el *Ars Conjectandi* jugó un papel central en el surgimiento de esta teoría pero también nos parece importante subrayar que dicho libro no surgió aislado, de la nada, sino que más bien es un paso determinante en un camino cuyo inicio es poco claro.

En este camino podemos mencionar tres libros previos al *Ars Conjectandi* dedicados a temas de probabilidad, vista como una matematización de los juegos de azar. El primero de ellos fue escrito en 1563 aproximadamente por Girolamo Cardano aunque no se publicó sino hasta 1663, *Liber de ludo aleae*;[2] el segundo fue escrito por Christiaan Huygens en 1657 y dedicamos la sección 1.2 a un breve análisis del mismo; y finalmente, el tercero, fue escrito por Pierre Raymond de Montmort y publicado en 1708, *Essai d'analyse sur les Jeux de Hazards*.[3] Sobre este último vale la pena citar la opinión de Todhunter en [23, p. 78]:

> In 1708 he published his work on Chances, where with the courage of Columbus he revealed a new world to mathematicians.[4]

Además de estos tres libros nos parece importante señalar los trabajos de Pascal, Fermat y Leibniz como piezas claves en el desarrollo de la teoría.

1.1 Pascal y Fermat

Pierre de Fermat nació en Castres el 17 de agosto de 1601 y murió el 12 de enero de 1665, y Blaise Pascal nació el 19 de junio 1623 en París y murió el 19 de agosto de 1662. Como ya mencionamos en la

---

tres están a favor de la existencia o futura existencia de algún resultado y las otras en su contra, entonces el resultado se dirá que tiene una certeza de $\frac{3}{5}a$ o $\frac{3}{5}$.]

[2] Ver [8].

[3] Ver [19].

[4] [En 1708 publicó su trabajo sobre [Probabilidades], en donde con el valor de Colón le reveló un nuevo mundo a los matemáticos.]

Introducción es frecuente que se diga que la teoría de la probabilidad comenzó con estos matemáticos. Nosotros consideramos que lo que sí tuvo lugar gracias a estos dos matemáticos fue un gran avance en esta teoría en 1654 debido a una larga correspondencia entre ellos.

En 1654 Antoine Gambaud, el Caballero de Méré, le envió a Pascal una serie de preguntas sobre los juegos de azar y en particular sobre lo que se conoce como el *problema de puntos*. Pascal le comunicó a Fermat los problemas y así comenzó un intercambio de cartas. Las soluciones se basaban sobre el principio de enumeración de los casos equiposibles y entre ellos los favorables a cada jugador. Esto lo habían hecho ya Galileo y Cardano[5] pero Pascal y Fermat tenían además a su disposición una teoría de combinatoria.

La correspondencia que mencionamos consiste en cartas escritas entre julio y octubre de 1654, aunque no todas se conservan. Vale la pena mencionar que además de estas cartas, las contribuciones de Pascal a la teoría de la probabilidad se pueden encontrar en su *Traité du tiangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la meme matiere* escrito también en 1654 pero dado a conocer en 1665.

Uno de los problemas planteados por de Méré a Pascal fue resuelto por éste y Fermat de manera independiente, llegando ambos a la misma solución. El problema consistía en lo siguiente: en una partida de dados intervienen dos jugadores y apuestan 32 doblones de oro. Cada jugador elige un número diferente y gana el juego el primero que obtenga tres veces el número que eligió. Después de un rato de juego, el número elegido por el primer jugador ha salido dos veces mientras el otro jugador sólo ha acertado una vez, en este instante la partida debe suspenderse. ¿Cómo dividir los 64 doblones de oro apostados? Tanto Pascal como Fermat estuvieron de acuerdo en que el primer jugador tiene derecho a 48 doblones de oro.

Es importante notar para nuestra historia que si bien las técnicas de resolución de este tipo de problemas fue altamente desarrollada en esta época, todavía faltaba hacer una separación entre los juegos de azar y una disciplina matemática en sí. Como ya habíamos comentado la aplicación de herramientas matemáticas no siempre produce un objeto matemático.

También es importante señalar que los resultados obtenidos por Pascal y Fermat en su correspondencia no fueron publicados, fue Cristiaan Huygens quien poco tiempo después publicó un tratado sobre probabilidad.

[5]El lector interesado en una detallada historia sobre estos temas puede consultar [10].

1.2 Huygens

Christiaan Huygens nació en 1629 y murió en 1695. En 1655 visitó París por vez primera en donde conoció a Roberval y Mylon más no a Carcavi ni a Pascal. De acuerdo con Huygens mismo, él se enteró de los problemas sobre probabilidad que habían sido discutidos en Francia en años recientes pero no se enteró de los métodos empleados ni de las soluciones obtenidas. De regreso en Holanda en 1656 Huygens resolvió los problemas y escribió un pequeño tratado, de tan sólo 16 páginas, sobre los juegos de azar, *Van Rekeningh in Speelen van Geluck*,[6] y en abril de este año le envió a van Schooten la primera versión de su manuscrito que se convertiría en su *De Ratiociniis in Ludo Aleae*.[7]

Al mismo tiempo Huygens le escribió a Roberval pidiendo su solución a lo que él consideraba el problema más dificíl y que aparecería en el tratado como la Proposición XIV:

> Propositio XIV
>
> Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hac conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primum senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meae ad ipsius sortem.[8]

Huygens no recibió respuesta de Roberval y por tanto le escribió a Mylon, quien a través de Carcavi le envió el problema a Fermat. En una carta de Fermat a Carcavi, que Carcavi envió a Huygens el 22 de junio de 1656, Fermat da la solución al problema, que coincidía con la encontrada por Huygens pero no incluye una demostración. En la misma carta Fermat planteó cinco problemas adicionales a Huygens los cuales Huygens resolvió inmediatamente y envió sus soluciones a Carcavi el 6 de julio solicitándole que les informara a Mylon, Pascal y Fermat para ver si sus soluciones coincidían con las de ellos. Posteriormente Huygens utilizaría dos de estos problemas como los problemas 1 y 3 de su tratado.[9]

---

[6] Ver [13, Vol. 14].

[7] Es probable que la publicación de su tratado de deba al esfuerzo e insistencia de van Schooten puesto que Huygens, al igual que otros matemt́icos de su época era renuente a publicar su obra.

[8] Ver [12, p. 533] [Supóngase que yo y otro jugador tomamos turnos al tirar dos dados con la condición de que yo gano si tiro siete puntos y él gana si tira seis puntos y yo le permito hacer el primer tiro. Encontrar la razón entre nuestras posibilidades [de ganar].]

[9] Problema 1: A y B juegan con un par de dados con la condición de que A gana si tira seis puntos y B gana si tira un siete puntos. A tiene el primer tiro, luego B tiene dos tiros, luego A tiene dos tiros y así sucesivamente hasta que alguno gane. La pregunta es encontrar la razón entre las probabilidades de que gane A y las probabilidades de que gane B.

Problema 3: A apuesta con B que de cuarenta cartas, habiendo diez de cada color, escogerá cuatro cartas de manera que escoja una de cada color. La razón entre las probabilidades de que gane A a que gane B es 1000 a 8139.

La respuesta enviada por Carcavi a Huygens el 28 de septiembre convenció a Huygens de que sus soluciones coincidían con las de Pascal y además contenía un nuevo problema planteado por Pascal a Fermat y que Huygens incluyó como el problema 5 en su tratado.[10]

En marzo de 1657 van Schooten le envió a Huygens la versión latina de su tratado para su revisión. Huygens agregó la proposición IX y la carta que envió a van Schooten fue utilizada como el prefacio para la obra. La obra se publicó ese mismo año como la última parte del libro de van Schooten *Exercitationum Mathematicarum*.

En su carta Huygens enfatiza la importancia de este nuevo tema y agrega que «Sciendum vero, quod jam pridem inter preastantissimos tota Gallia Gemometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat.»[11]

El texto de Huygens se presenta como un artículo sobre la teoría de la probabilidad. Huygens presenta un axioma sobre el valor de un juego justo y a partir de éste deduce tres teoremas sobre la esperanza matemática. A su vez estos teoremas son utilizados para resolver los problemas, que junto con los tres teoremas mencionados, componen las 14 proposiciones del *De Ludo Aleae*.

El axioma que presenta Huygens no lleva tal apelativo, él lo llama fundamento:

> Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, un aleae ludo tanti aestimandam esse cujusque fortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectatuinem pervenire, aequa conditione certans.[12]

Como ejemplo de este fundamento Huygens explica que si alguien tuviera 3 objetos en una mano y 7 objetos en la otra y al jugador se le diera a escoger una mano, esto vale, o tiene esperanza, para el jugador tanto como si con certeza tuviera 5 objetos puesto que si tuviese 5 objetos el jugador podría establecer un juego justo en el cual tiene posibilidad de obtener 3 o 7 cosas.

Con base en esto se demuestran los primeros 3 teoremas:

I. El tener iguales posibilidades de obtener a o b vale $\frac{a+b}{2}$.
II. El tener iguales posibilidades de obtener a, b o c vale $\frac{a+b+c}{3}$.

[10] Problema 5: A y B tienen cada uno 12 fichas y juegan con tres dados con la condición de que si se tiran 11 puntos A le da una ficha a B y si se tiran 14 puntos B le da una ficha a A y que gana el juego el primero en obtener todas las fichas. Se encuentra que el número de posibilidades de A al número de posibilidades de B es 244,140,625 a 282,429,536,481.

[11] Ver [12, p. 519-520]. [También se debería decir que ya desde hace algún tiempo, los mejores matemáticos de Francia se han ocupado con este tipo de cálculo de manera que nadie me debe atribuir a mi el honor de su invención.]

[12] Ver [12, p. 521-522]. [Tomo como fundamental para tales juegos que la posibilidad de ganar algo vale tanto, que si uno lo tuviera, uno podría nuevamente obtener la misma posibilidad en un juego justo, es decir, en un juego en el que nadie tuviera certeza de perder.]

III. El tener p posibilidades de obtener a y q posibilidades de obtener b, siendo iguales las posibilidades, vale $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Para Huygens estas proposiciones requerían una demostración y con base en ellas demuestra las proposiciones IV–XIII que no enunciaremos en detalle. Sin embargo, la proposición XIV ya mencionada difiere de las anteriores en que no hay una cota superior para el número de juegos y por tanto el método recursivo usual no puede ser aplicado. Ante esta dificultad Huygens desarrolló un nuevo método al que Jacob Bernoulli se referiría como *el método analítico de Huygens*. Las proposiciones IV–XIII se demuestran numéricamente por recursión pero ésta última requiere de dos ecuaciones algebraicas para su solución.

Existen tres ediciones anotadas del Tratado de Huygens. La primera en aparecer fue la primera parte del *Ars Conjectandi*, la segunda es la edición de Korteweg de 1920 que aparece en la obra completas de Huygens[13] y la tercera es la edición de Dupont y Roero de 1984.[14]

Después de 1657 Huygens regresó de manera intermitente a temas de probabilidad, sin embargo, sus resultados no fueron publicados. En 1665 sostuvo un intercambio cuantioso de cartas con Hudde sobre la resolución de sus problemas 2 y 4; en 1669 se dio lo que puede ser considerada como su contribución más importante a estos temas con relación a una interpretación probabilística de la tabla de vida de Graunt (en correspondencia con su hermano Lodewijk) y finalmente en 1679 y 1688 resolvió problemas sobre algunos juegos de cartas.

1.3 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació el primero de julio de 1646 en Leipzig y murió el 14 de noviembre de 1716 en Hanover. Estudió leyes y en su disertación presentada en 1665, *De conditionibus*,[15] discutió algunos temas de probabilidad. Este texto trata la idea de derechos condicionales y hacia el final de la disertación Leibniz sugiere que los derechos se representen por medio de números; un derecho absoluto con la unidad, un derecho inexistente con cero y un derecho condicional con un número entre 0 y 1. Un derecho es inexistente, condicional o absoluto dependiendo de si la condición sobre la cual se basa es imposible, contingente o necesaria respectivamente. La magnitud de un derecho condicional depende de la probabilidad de la existencia de la condición:

> Quanto major probabilitas est existentiae Conditionis, tanto majoris jus Conditionale.[16]

[13] Ver [13, Vol. 14]
[14] Ver [9].
[15] Ver [14].
[16] Ver [14] [Cuanto mayor sea la probabilidad de existencia de la condición, mayor será el derecho condicional.]

Es importante notar que aunque [14] se publicó en 1665, se revisó en 1667 y se republicó en 1669 como parte de *Specimina juris*, no fue un texto muy influyente. Es un texto cuya importancia radica en el hecho de que Leibniz parece haber contemplado una concepción numérica de la probabilidad no ligada ni inspirada por los juegos de azar.

Por otra parte, en 1666 Leibniz escribió el tratado *de Arte combinatoria* y fue aproximadamente entre 1672 y 1676, durante una estancia en París, cuando Leibniz obtuvo conocimiento de los trabajos recientes sobre los juegos de azar y anualidades. Y fue en 1678–1682, de regreso en Alemania, cuando escribió dos ensayos sobre estos temas: uno inédito hasta 1957 llamado *De incerti aestimatione* y un segundo ensayo intitulado *Essai de quelques raisonnements sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*. El reconocimiento del papel que juega el concepto de probabilidad en estos ensayos es clave para el desarrollo de esta ciencia.

Para la historia del *Ars Conjectandi* que nos ocupa aquí es importante señalar que parte de la extensa correspondencia entre Johann y Jacob Bernoulli con Leibniz se dedicó a temas de probabilidad, como se verá en una sección posterior.

2. Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli nació en Basilea en 1654,[17] el mismo año en el que comenzó la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre temas de probabilidad y murió en la misma ciudad en 1705.

Jacob Bernoulli recibió su Magister Artium en 1671 y en 1676 completó sus estudios de teología. Sin embargo desde temprana edad había mostrado un interés por las matemáticas y la astronomía y dedicó su primera publicación a estos temas; al cometa de 1680–81. En 1681 viajó a Holanda e Inglaterra en donde conoció a Jan Hudde y publicó su segunda obra dedicada al estudio de la gravedad del éter y en 1682, en Londres, conoció a John Flamsteed, Robert Boyle, Robert Hooke, Richard Baxter e Isaac Voss.

Otros miembros de la familia Bernoulli siguieron el camino de Jacob hacia las matemáticas y desde principios de la década de los ochentas Jacob fue tutor de su hermano menor Johann.

Un punto importante en la carrera matemática de los hermanos se dió en 1684 cuando Leibniz publicó su primer artículo sobre el cálculo diferencial en Acta Eruditorum, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates*

[17] Si se toma en cuenta el cambio del calendario juliano al calendario gregoriano se puede ajustar su fecha de nacimiento a 1655.

moratur, et singulare pro illis calculi genus.[18] Los hermanos Bernoulli adoptaron el nuevo método aplicándolo a varios problemas abiertos y en particular, en mayo de 1690 Jacob publicó, también en Acta Eruditorum, *Analysis problematis ante hac propositi, de inventione linea descensus a copore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam problematis propositio*[19] utilizando ya las técnicas del cálculo diferencial. Nos parece importante señalar que los hermanos Bernoulli fueron de los primeros en entender plenamente las ideas de Leibniz y aplicarlas.

También es importante señalar que aunque tanto Jacob como Johann trabajaban sobre problemas en las mismas áreas, la relación entre ellos se comenzó a deteriorar en la década de los noventa y pasaron de ser colaboradores a rivales declarados. Johann deseaba tener el puesto como profesor de matemáticas que su hermano tenía en la Universidad de Basilea y lo resintió aún más cuando tuvo que mudarse, por cuestiones de trabajo, a Holanda en 1695. Para 1697 la relación entre los hermanos se encontraba deshecha. La rivalidad creada entre ellos, en retrospectiva, resulta difícil de entender puesto que ambos hicieron grandes contribuciones al terreno de la física y de las matemáticas. No obstante, la rivalidad persistiría hasta la muerte de Jacob.

2.1 Jacob Bernoulli y la Probabilidad

No se sabe con exactitud cuándo es que Jacob Bernoulli desarrolló su interés por la probabilidad. Lo que es claro es que fue profundamente influenciado por el libro de Huygens que discutimos en la sección 1.2 y es posible que esto haya sucedido cuando era estudiante y trabajaba sobre los ejercicios de van Schooten en [22]. No se tiene registro de que Jacob Bernoulli haya conocido a Huygens pero ciertamente no es imposible que esto haya ocurrido. Lo que es claro es que antes de 1685 debió de haber comenzado a trabajar sobre problemas relacionados con los juegos de azar.

La primera publicación de Jacob Bernoulli sobre los temas que serán abordados en el *Ars Conjectandi* apareció el 26 de agosto de 1685 en el *Journal des Sçavans.*[20] Bernoulli publicó el siguiente problema:

> A & B jouënt avec un dez, a condition que celuy qui jette le premier aura gagné. A joue une fois, puis B une fois ; apres A joue deux fois de suite, puis B deux fois ; puis A trois fois de suite, & B aussi trois fois. Ou bien, A joue une fois, puis B deux fois de suite, puis A trois sois de suite, puis B

[18] Ver [15].
[19] Ver [3].
[20] Ver [2].

> quatre fois, &c. jusqu'a-ce que l'un d'eux gagne. On demande la raison de leur sort?[21]

Este problema no recibió solución y fue el propio Bernoulli quien en 1690 publicó una solución en [4]:

> Hoc Problema cum frustra hactenus expectarit solutionem, eandem per series infinitas sic exhibeo : sors Collusoris A ad sortem Collusoris B in priori casu se habet, ut

$$1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{12}+\left(\frac{5}{6}\right)^{20}\&c.-\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{5}{6}\right)^9-\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\&c.$$

> in posteriori, ut

$$1+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{21}+\left(\frac{5}{6}\right)^{36}\&c.-\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^6-\left(\frac{5}{6}\right)^{15}-\left(\frac{5}{6}\right)^{28}\&c.$$

> ad unitatis complementum. [22]

Vale la pena notar que en el mismo volumen Leibniz publicó también una solución a este problema que concuerda con la de Bernoulli.[23]

Otra publicación del mismo año es *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici* presentada por Jacob y Johann en Basilea el 9 de septiembre. En él se encuentran *tesis* que muestran el paralelismo entre el razonamiento lógico y el algebraico y la tesis XXI en particular trata con un problema de probabilidad. Se trata de un problema sobre un contrato de matrimonio entre Tito y Caia que también es estudiado en el artículo 77 de las *Meditationes*.[24]

Fue durante el periodo entre 1684/85 y 1690 que Bernoulli comenzó con lo que sería el trabajo preliminar para el *Ars Conjectandi* como se puede apreciar en sus *Meditationes*. Comienza resolviendo algunos de los problemas de Huygens y luego presenta algunos comentarios (y ejemplos) sobre la posibilidad de emplear la probabilidad matemática para resolver problemas más allá de los juegos de azar. Antes de 1690

---

[21] Ver [2]. [A y B juegan con un dado a condición de que quien tire un uno habrá ganado. A tira una vez, luego B tira una vez, después A tira dos veces seguidas, luego B tira dos veces, después A tira tres veces y B también tres veces. O bien, A tira una vez, luego B tira dos veces, luego A tira tres veces, después B tira cuatro veces, etc. hasta que uno de ellos gane. Uno se pregunta por la razón de su fortuna.]

[22] Como el problema ha esperado solución hasta ahora en vano, presento una a través de series infinitas: la suma del jugador A y la suma del jugador B en el primer caso son entre si como

$$1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{12}+\left(\frac{5}{6}\right)^{20}\&c.-\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{5}{6}\right)^9-\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\&c.$$

en relación al segundo como

$$1+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{21}+\left(\frac{5}{6}\right)^{36}\&c.-\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^6-\left(\frac{5}{6}\right)^{15}-\left(\frac{5}{6}\right)^{28}\&c.$$

al complemento de la unidad.

[23] Ver [4, p. 358-360].

[24] Ver [6, p. 42]. Es posible que este problema haya tenido su origen en la transacciones financieras que tuvieron lugar para el matrimonio de Jacob con Judith Stupan en 1684.

tenía ya notas sobre la convergencia de frecuencias distribuidas según la binomial y la demostración de su gran teorema conocido desde 1837, cuando Poisson así lo nombró,[25] hasta hoy, como la ley (débil) de los grandes números.

Es interesante notar que en las *Meditationes* no hay notas sobre probabilidad durante la última década del siglo XVII, seguramente durante este periodo estuvo dedicado a otras actividades matemáticas. Lo que sí se tiene es una carta, fechada en París el 8 de diciembre de 1692, que L'Hospital le escribe a Johann Bernoulli. En esta carta aparece una frase clave que nos muestra el desarrollo del trabajo de Jacob Bernoulli así como la importancia que éste tenía para el propio Jacob:

> Je vous prie de faire mil complimens de ma part à Mr. vostre frere [...] demandez lui aussi quelle est cette proposition qui est dans son liure de arte conjecturandi dont it estimoit autant la decouuerte que la quadrature du cercle.[26]

Si bien durante esa década Jacob Bernoulli no trabajó sobre estos temas, lo que es claro es que los retomó dos o tres años antes de su muerte en 1705 cuando se dio a la tarea de escribir el manuscrito que finalmente dejaría inconcluso.

2.2 Correspondencia entre Leibniz y Jacob Bernoulli

En 1697 Johann Bernoulli le informó a Leibniz en una carta, fechada el 16 de febrero, que Jacob se encontraba en proceso de escribir un tratado sobre probabilidad en el cual se tratarían aplicaciones a la vida más allá del estudio de los juegos de azar:

> Ipsum circa ludum Bassetae aliquid mathematice fuisse meditatum hactenus nesciebam; id videre optarem: nam frater meus jam a longis annis opus molitur, quod artem conjecturandi inscribet, ubi non solum omnivarios ludos mathematice tractandi, sed etiam alias in omni vitae genere probabilitates ad calculum revocandi modum traditurus est.[27]

Leibniz a su vez respondió, en una carta fechada el 5 de marzo de 1697, que él alguna vez había considerado estos temas y esperaba que los matemáticos pudieran seguir esta línea de investigación. Seis años más tarde, Leibniz regresaría al tema en una carta a Jacob Bernoulli.

[25] Ver [20, p. 7].

[26] Ver [7, p. 160]. [Le pido extienda mil elogios de mi parte a su Sr. hermano [...] y pregúntele también cual es la proposición que está en su libro de arte conjecturandi y que estima [es tan importante] como la cuadratura del círculo.]

[27] Ver [17, XLIV p. 367]. [En lo que respecta al juego de Bassette algún matemático ya lo ha considerado, soy ignorante de cual; he deseado verlo, por ejemplo desde hace largos años mi hermano trabaja sobre un texto que intitulará ars conjecturandi, en donde no solo tratará a todos los juegos matemáticamente, pero también tratará otros modos de la vida aplicando la regla para calcular probabilidades.]

De hecho entre abril de 1703 y abril de 1705 Jacob Bernoulli y Leibniz intercambiaron una larga serie de cartas sobre temas de relacionados con el *Ars Conjectandi*.

En la posdata a la carta XI de Leibniz a Bernoulli, fechada en abril de 1703, Leibniz le dice a Bernoulli que ha escuchado de su trabajo y que desearía conocer todo lo que Bernoulli ha trabajado sobre estos temas.

Jacob a su vez le responde a Leibniz el 3 de octubre de 1703 en una larga carta en la que detalla su trabajo y su teorema central. También le comenta a Leibniz que este teorema ya se lo había mostrado a su hermano doce años atrás:

> [...] Sed neque hoc totum est, quod volo: quaerendum insuper est, an crescente numero observationum [p]ita continuo crescat probabilitas, ut tandem data quavis probabilitate probabilius mihi fiat, me veram rationem inter numeros casuum, quam aliam a vera diversam, invenisse: an vero problema suam, ut sic dicam, habeat asymptoton, id est, an perveniam tandem ad aliquem probabilitatis gradum, ultra quem probabilius mihi fieri non possit, me veram rationem detexisse. Nam si hoc sit, actum erit de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta: sin illud, aeque certo rationem illorum a posteriori indagabimus, atque si nobis a priori cognita esset. Et hoc quidem modo reperi se rem habere; unde jam determinare possum, quot observationes instituendae, ut centies, millies, decies millies etc. verisimilius (adeoque tandm ut moraliter certum) sit, rationem inter numeros casuum, quam hoc pacto obtineo, legitimam et genuinam esse.[28]

Leibniz respondió a esta carta el 3 de diciembre de 1703 y objetó la validez de las probabilidades calculadas *a posteriori* y en particular señala que los hechos que dependen de un número infinito de casos no pueden ser determinados por un número finito de experimentos.

[28] Ver [17, p. 78]. [Pero esto no es todo lo que quiero: además, hay que preguntarse si la probabilidad de obtener una razón precisa aumenta sostenidamente a medida que el número de observaciones crece, de modo que finalmente la probabilidad de que haya obtenido la verdadera razón en lugar de una razón falsa supere cualquier probabilidad dada; o si cada problema, por así decirlo, tiene una asíntota –es decir, si finalmente llegaré a un cierto nivel de probabilidad más allá del cual no puedo tener más certeza de que he detectado la verdadera razón. Si esto último es cierto, terminaremos con nuestro intento de encontrar el número de resultados posibles a través de experimentos, y si lo primero es cierto, investigaremos la razón entre los números de posibles resultados *a posteriori* con tanta certeza como si fuera conocido por nosotros *a priori*. Y he encontrado que la primera condición es en efecto el caso, de donde ahora puedo determinar el número de ensayos necesarios para que sea cien, mil, diez mil, etc, veces más probable (y finalmente, para que sea moralmente cierto) que la razón entre el número de posibles resultados que puedo obtener de esta manera es legítima y genuina.]

Sin retractarse de lo dicho, el 20 de abril del año siguiente Jacob presenta otra explicación de su teorema a Leibniz:

> Difficultas autem Tua contra modum meum Empiricum determinandi rationem inter numeros casuum, non magis urgegt illa exempla, in quibus de numeris istis aliunde constare nequit, quam illa, in quibus etiam a priori cognosci possunt. Dixi autem, in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationem jam ante duodecennium Frater et approbavit. Ut vero clarius comprehendas quid velim, do Tibi exemplum: Pono in urna quadam reconditos esse calculos aliquot, albos et nigros, et numerum alborum esse duplum numeri nigrorum, Te autem nescire hanc rationem, et experimentis illam determinare velle. Educis itaque calculum unum post alterum (reponendo singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligis, ne numerus calculorum in urna minuatur) et observas, albus an ater sit quem elegisti. Dico jam, quod (assumtis duabus rationibus rationi duplae quantumvis propinquis, una majore, minore altera, puta 201:100 et 199:100) scientifice determino numerum observationum, quem si instituas, decies aut centies aut millies etc. probabilius tibi fiat, rationem numeri vicium, quibus album aligis, ad numerum vicium, quibus eligis nigrum, intra quam extra hos limites rationis duplae 201:100 et 199:100 casurm; adeo ut tandem moraliter certus esse possis, rationem per experimenta deprehensam verae rationi duplae quantumvis proxime accessuram.[29]

[29]Ver [17, p. 87-88][[...] la dificultad que encontraste con mi método empírico para determinar la razón entre el número de posibles resultados requiere de más ejemplos, no aquellos en los que es imposible por cualquier medio ponerse de acuerdo sobre los números en sí, sino más bien aquellos en los que los números se pueden obtener *a priori*. Además, dije que podría, en estos ejemplos, proporcionar una demostración (que mi hermano vió y aprobó desde hace doce años). Para que puedas realmente entender con mayor claridad lo que pienso, doy un ejemplo: Coloco en una urna varias piedritas escondidas, unas blancas y otras negras, y el número de las blancas es el doble del número de las negras, pero tú no conoces esta relación y deseas determinarla por experimento. Y así, se saca una piedrita tras otra (reemplazando cada piedra que se saque antes de sacar la siguiente de manera que el número de piedras en la urna no se vea disminuido) y se lleva la cuenta de si se ha elegido una negra o una blanca. Ahora, yo afirmo (asumiendo que tienes dos estimaciones de razón dos a uno, que aunque bastante cercanas entre sí difieren, una siendo más grande y la otra más pequeña – digamos 201: 100 y 199: 100) que puedo determinar científicamente el número necesario de observaciones para que con diez, cien, mil, etc veces más probabilidad, la razón entre el número de casos en los que tú elijas una piedrecita blanca al número de casos en los que elijas una negra caerá dentro, y no fuera de estos límites de dos a uno: 201: 100 y 199: 100, y por tanto afirmo que se puede tener certeza moral de que la razón obtenida por experimento se acercará tanto como se quiera a la verdadera razón de dos a uno.]

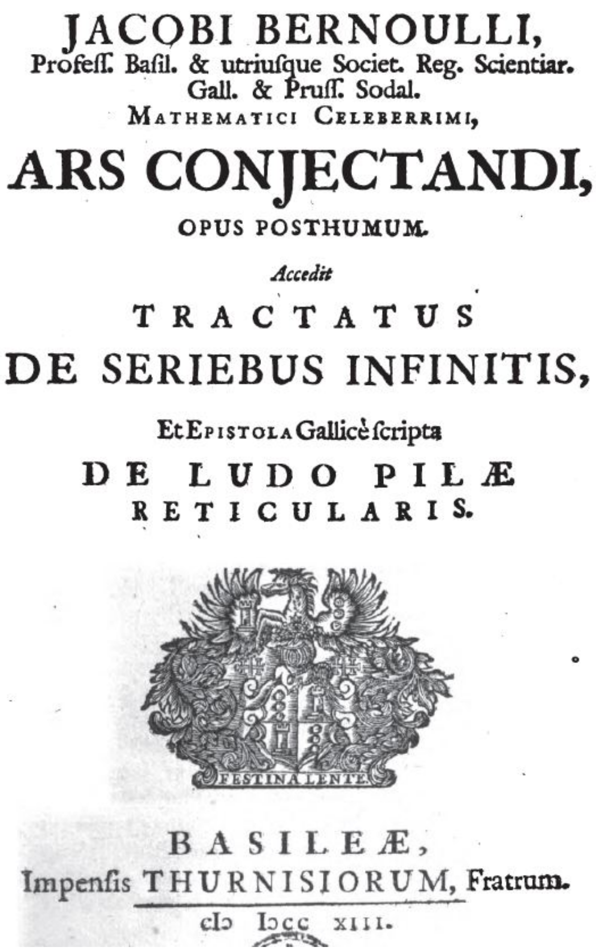
Después de un considerable intercambio de cartas, el 28 de febrero de 1705 Jacob le escribe a Leibniz y termina la discusión sobre la proposición principal del texto diciendo que Leibniz seguramente estará complacido con la publicación.

> [...] et certus sum Tibi placituram demonstrationem, cum publicavero.[30]

Como ya mencionamos previamente, Bernoulli murió antes de que la obra fuese publicada.

3. *Ars Conjectandi*

El *Ars Conjectandi* se divide en cuatro partes:[31]



JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
FESTINA LENTE
BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

[30]Ver [17, p. 97]. [[...] y estoy cierto de que te será una grata demostración cuando la publique.]

[31]Y contiene un apéndice en el cual aparece una carta dirigida a un amigo sobre los puntos en el *Jeu de Paume*.

3.1 Parte I

La primera parte está formada por el *De Ratiociniis in Ludo Aleae* de Huygens junto con los comentarios de Jacob, que en conjunto son mucho más largos que la obra de Huygens en sí. Como ya habíamos mencionado, el tratado de Huygens consta de 14 proposiciones y 5 problemas que el lector debe resolver para llegar a la respuesta proporcionada. En su prefacio Huygens presenta este trabajo como un ejemplo de la ciencia del análisis[32] que es el término que utiliza para referirse a lo que podríamos llamar álgebra. De hecho en el holandés original Huygens había escrito *konst von Algebra* y Bernoulli utiliza la frase *análisis algebraico*.

Dentro de los comentarios que Jacob agrega al trabajo de Huygens se encuentran el uso de series infinitas y logaritmos y estos en realidad empiezan a formar parte de los métodos matemáticos para la resolución de este tipo de problemas. Bernoulli sugiere reemplazar los resultados numéricos de Huygens por fórmulas, generaliza los problemas y presenta nuevos métodos de solución.

Un punto importante a resaltar es que Bernoulli subraya que cuando se repite un juego de azar, la probabilidad de ganar en un solo juego es constante, es decir, es independiente del resultado de juegos anteriores.[33]

El los comentarios que Bernoulli agrega no formula de manera explícita la ley de suma para las probabilidades pero la utiliza como algo dado. Por otra parte, sí formula la regla de multiplicación. Si se tiene una serie de ensayos con diferentes probabilidades de éxito $p_1, p_2, \ldots,$ entonces la probabilidad de obtener una series de éxitos y fracasos en un orden específico es el producto de sus probabilidades correspondientes.

Pero quizá la contribución más importante de Bernoulli en la Parte I se encuentra en sus comentarios a la Proposition XIV (que habíamos ya comentado en la sección dedicada a Christiaan Huygens). Para resolver el problema Bernoulli considera un número infinito de jugadores cada uno teniendo un tiro de dados. Todos los jugadores pares tienen una cierta probabilidad de ganar la tirada, digamos p_1 y los jugadores impares tienen la probabilidad p_2 de ganar. Por ejemplo, la condición para que el jugador 4 gane es que los primeros 3 no hayan tenido éxito y que él mismo sí obtenga un tiro favorable. La probabilidad de que esto ocurra es entonces $q_2q_1q_2p_1$ en donde q_i denota la probabilidad de fracasar en cada caso. Bernoulli incluye una tabla con las probabilidades de que cada jugador gane.[34] Posteriormente concluye que la probabilidad

[32] *Analytices scientia* como él la llama.

[33] De aquí proviene el término, aún en uso al día de hoy, de *ensayo o experimento de Bernoulli*.

[34] Hemos cambiado la notación original que utiliza Bernoulli con el afán de hacer más claro su procedimiento.

de que gane el primer jugador es la suma de las probabilidades de todos los jugadores pares y la probabilidad de que gane el segundo jugador es la suma de las probabilidades de todos los jugadores impares:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1q_2\left(1 + q_1q_2 + (q_1q_2)^2 + \cdots\right) = \frac{p_1q_2}{1 - q_1q_2} \\ P_2 &= p_2\left(1 + q_1q_2 + (q_1q_2)^2 + \cdots\right) = \frac{p_2}{1 - q_1q_2}. \end{aligned}$$

Bernoulli utiliza este método para resolver el problema que él había planteado en 1685 en [2] así como los problemas 1 y 2 de Huygens.

3.2 Parte II

La segunda parte del *Ars Conjectandi* es una presentación sistemática de lo que Jacob llama la doctrina de permutaciones y combinaciones. Esta parte está su vez dividida en nuevo capítulos en los cuales Bernoulli presenta de manera detallada los siguientes temas:

1. Permutaciones.
2. Combinaciones.
3. El número de combinaciones de una clase particular, números figurativos y sus propiedades, las sumas de potencias de enteros.
4. Las propiedades de C_m^n.[35]
5. Combinaciones con repetición.
6. Combinaciones con repetición restringida.
7. Variaciones sin repetición.
8. Variaciones con repetición.
9. Variaciones con repetición restringida.

3.3 Parte III

En la tercera parte Bernoulli regresa a los juegos. Vale la pena mencionar que sólo algunos de los juegos mencionados eran juegos que en realidad existían como tales, muchos parecen haber sido inventados para ilustrar los métodos de solución. En las partes I y II Bernoulli había desarrollado nuevas herramientas para resolver problemas relacionados con juegos de azar y las utiliza en su análisis de problemas clásicos discutidos por Pascal, Fermat y Huygens. En esta sección Bernoulli resuelve 24 problemas que no habían sido analizados de esta manera previamente.

A manera de ejemplo consideraremos el Problema 19:[36]

[35] Nuevamente hacemos notar nuestro uso de notación contemporánea.

[36] Ver [5, p. 182]. [Suponga cualquier tipo de juego en el cual el organizador del juego (el banco del juego) tiene alguna ventaja que consiste en el hecho de que el número de casos en los cuales él gana es un poco mayor que el número de casos en los que pierde y más aún en que el número de

PROBLEMA XIX.

In quolibet Aleæ genere, ſi ludi Oeconomus ſeu Diſpenſator (le Banquier du Jeu) *nonnihil habeat prærogativæ in eo conſiſtentis, ut paulo major ſit caſuum numerus quibus vincit quàm quibus perdit; & major ſimul caſuum numerus, quibus in officio Oeconomi pro ludo ſequenti confirmatur, quàm quibus œconomia in colluſorem transfertur. Quæritur, quanti privilegium hoc Oeconomi ſit æſtimandum?*

Es digno de notar que antes de presentar la solución correcta del problema, Bernoulli detalla dos soluciones falsas a las que había llegado previamente. Para llegar a la solución correcta el razonamiento es el siguiente: Supongamos que se juegan m juegos y que el banco gana cada juego con probabilidad p en donde $p+q=1$ y $p-q=r>0$. Supongamos también que la probabilidad de que el banco siga como banco es h en donde $h+k=1$ y $h-k=t>0$. El ganador de cada juego recibirá la suma a del perdedor. En el primer juego la esperanza del banco es por tanto $pa-qa=ra$. De esta manera, en cada juego en el cual un jugador es el banco su esperanza es ra y si no es el banco su esperanza es $-ra$. Durante los dos primeros juegos la esperanza del jugador que fue el banco en el primer juego es $ra+hra-kra=ra(1+t)$ y continuando de esta manera Bernoulli encuentra que la esperanza del banco es

$$ra\left(1+t+t^2+\cdots+t^{m-1}\right)=ra\frac{1-t^m}{1-t}.$$

3.4 Parte IV

La Parte IV del *Ars Conjectandi*, además de contener el célebre teorema de Bernoulli, contiene una aproximación sistemática y definitiva de la probabilidad filosófica y la probabilidad derivada de la geometría del azar. Esta parte del texto de Bernoulli representa el marco fundamental de la conceptualización moderna de la teoría de la probabilidad.

Bernoulli, fuertemente influenciado por la *Lógica de Port–Royal*[37] establece un marco conceptual y sistemático para la probabilidad. En

---

casos en los que el banco se mantiene para el juego siguiente es ligeramente mayor que el número de casos en los que el banco es transferido a otro jugador. ¿Qué tan grande es la ventaja del banco?]

[37] Ver [1]. El texto lleva por título *Ars cogitandi* y es claro que Bernoulli no sólo se insipira en él para darle título a su trabajo sino que hasta cierto punto lo considera una extensión del texto de lógica.

primer lugar distingue entre dos tipos de certeza, la objetiva y la subjetiva. Para él la certeza objetiva es:[38]

> Omnia, quæ ſub Sole ſunt vel fiunt, præterita, præſentia ſive futura, in ſe & objectivè ſummam ſemper certitudinem habent.

y con respecto a la subjetiva dice:[39]

> Illa de quibus revelatione, ratione, ſenſu, experientia, αὐτοψίᾳ aut aliter ita conſtat, ut de eorum exiſtentia vel futuritione nullo modo dubitare poſſimus, ſumma & abſoluta certitudine gaudent.

Una vez presentada esta distinción Bernoulli presenta su definición de probabilidad que citamos anteriormente y es claro que la probabilidad deja de estar únicamente vinculada a los juegos de azar. Bernoulli trata de dar respuestas a preguntas como ¿Cómo se puede determinar la probabilidad de algún evento en el cual la repetición no es posible?

La Parte IV del *Ars Conjectandi* está dividida en cinco capítulos y es sin duda la parte más importante del libro; si bien, en las tres secciones previas Bernoulli presenta métodos y resultados nuevos, es en esta sección, que está dedicada al uso y la aplicación de las doctrinas precedentes a temas civiles, morales y económicos, en donde realmente se puede observar la fuerza de los métodos introducidos por Bernoulli así como el surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad en tanto que tal. Es en esta sección en donde Bernoulli demuestra también su famoso teorema. Este teorema es sin duda el resultado central de la obra y fue el objeto de discusión en la correspondencia entre Leibniz y el autor, sin embargo, es el contexto general de esta sección del libro el que permite vislumbrar la profundidad del resultado de Bernoulli y el nacimiento de un nuevo objeto de estudio.

En el capítulo II Bernoulli dice que las probabilidades se estiman por el número y el peso de los argumentos:[40]

> Probabilitates æſtimantur ex *numero* ſimul & *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam eſſe, fore aut fuiſſe. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi.

---

[38] Ver [5, p. 210]. [Todo lo que, bajo el sol, es, será o fue posee siempre en sí mismo y objetivamente la máxima certeza.]

[39] Ver [5, p. 211]. [Aquellas cosas que, por revelación, razón, sensación, experiencia, $\alpha\upsilon\tau o\psi\iota\alpha$ son tan evidentes que no podemos dudar de su existencia presente o futura de ninguna manera tienen la más alta y absoluta certeza.]

[40] Ver [5, p. 214] [Las probabilidades se estiman de acuerdo al *número* y *peso* de los *argumentos* que de alguna manera prueban o indican que algo es, será o ha sido. Por *peso* me refiero a la fuerza probativa.]

y presenta las siguientes reglas (o axiomas) que él dice le serán obvias a cualquier persona en su sano juicio:

1. Uno no debe usar conjeturas en los casos en los que se puede tener certeza.
2. Uno debe buscar todos los posibles argumentos o evidencia en relación al caso.
3. Se deben tomar en cuenta tanto argumentos a favor como en contra del caso.
4. Para un jucio sobre eventos generales bastan argumentos generales; sin embargo, para eventos individuales es necesario tomar en cuenta argumentos especiales e individuales.
5. En caso abiertos a duda o incertidumbre se deben suspender nuestras acciones hasta que sepamos más; sin embargo, si las circunstancias no permiten un retraso, la acciòm más adecuada, segura, correcta y probable debe ser escogida.
6. Aquello que puede ser útil en alguna ocasión y nunca dañino debe preferirse a lo que ni ayuda ni daña.
7. El valor de las acciones humanas no debe ser juzgado por sus resultados.
8. En nuestros juicios debemos ser cuidadosos de atribuirle más peso a una cosa del que se le debe y de considerar algo que es más probable que otra cosa como absolutamente cierto.
9. Esta es la regla, ya discutida, que enuncia que la certeza moral debería, en la práctica, ser considerada como certeza absoluta.

Estas nueve reglas están ilustradas con instancias particulares; por ejemplo, de acuerdo a la primera regla un astrónomo no debe adivinar cuando va a ocurrir un eclipse ya que lo puede predecir con certeza mediante el cálculo. Es fácil estar de acuerdo con Bernoulli sobre el hecho de que estas reglas son razonables, sin embargo lo que no es trivial es ver cómo van a ser usadas para encontrar probabilidades específicas.

En el capítulo III presenta una clasificación de argumentos (en donde nuevamente se aprecia la influencia del *Ars cogitandi* sobre Bernoulli) y es en el capítulo IV en donde finalmente se refiere a su teorema. La demostración del mismo aparece hasta el capítulo siguiente, aquí se limita a hacer la siguiente aclaración:[41]

[41] Ver [5, p. 227]. [Por tanto, este es el problema que he decidido publicar en este lugar después de ponderarlo por veinte años. Tanto su novedad como su gran utilidad, combinado con su igualmente grande dificultad exceden en tamaño y valor a los otros capítulos de esta doctrina. Pero antes de presentar su solución permítanme despejar algunas objeciones que algunos hombres ilustrados me han hecho.] Las objeciones a las que se refiere aquí Bernoulli son muy similares a las que se encuentran en la correspondencia con Leibniz.

Hoc igitur eſt illud Problema, quod evulgandum hoc loco propoſui, poſtquam jam per vicennium preſſi; & cujus tum novitas, tum ſumma utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinæ capitibus pondus & pretium ſuperaddere poteſt. Ejus autem ſolutionem priuſquam tradam, paucis objectiones diluam, quas Viri quidam docti contra hæc placita moverunt.

En la página 236, después de presentar 5 lemas, finalmente enuncia su teorema, que llama Proposición Principal:[42]

Propoſ. Princip. Sequitur tandem Propoſitio ipſa, cujus gratia hæc omnia dicta ſunt, ſed cujus nunc demonſtrationem ſola Lemmatum præmiſſorum applicatio ad præſens inſtitutum abſolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo caſus illos, quibus eventus quidam contingere poteſt, *fœcundos* ſeu *fertiles*; & *ſteriles* illos, quibus idem eventus poteſt non contingere: nec non experimenta *fœcunda* ſive *fertilia* illa, quibus aliquis caſuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* ſive *ſterilia*, quibus ſterilium aliquis contingere obſervatur. Sit igitur numerus caſuum fertilium ad numerum ſterilium vel præciſè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ ſeu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Oſtendendum eſt, tot poſſe capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus veriſimilius evadat, numerum fertilium obſervationum intra hos limites quàm extra caſurum eſſe, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium obſervationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Si bien este teorema es, desde cierto punto de vista, el objetivo fundamental del *Ars Conjectandi* nuestro objetivo en el presente artículo

[42]Ver [5]. [Prop. Princip. Finalmente sigue la proposición para la cual se ha dicho todo lo anterior y cuya demostración puede ser dada ahora con tan sólo la aplicación de los lemas precedentes. Para evitar un tedioso circunloquio llamaré a los casos en lo cuales puede ocurrir cierto evento *fértiles.* Llamaré *estériles* a los casos en los cuales el evento no puede ocurrir. También llamaré fértiles a los experimentos en los cuales se observa un caso fértil y estériles a los expirementos en los cuales se observa un caso infértil. El número de los casos fértiles y el número de los casos estériles tienen exacta o aproximadamente la razón $\frac{r}{s}$ entre sí, y sea el número de todos los casos fértiles al número de todos los casos como $\frac{r}{r+s}$ o $\frac{r}{t}$. La razón se encuentra entre los límites $\frac{r+1}{t}$ y $\frac{r-1}{t}$. Se debe mostrar que se pueden tomar tantos experimentos de manera que se vuelve cualquier número de veces (digamos c) más probable el que el número de observaciones fértiles caiga entre estos límites y no fuera de ellos, es decir, que la razón del número de fértiles al número de todas las observaciones tendrá una razón que no es ni mayor a $\frac{r+1}{t}$ ni menor a $\frac{r-1}{t}$.]

ha sido el hacer una historia del texto completo, y no de este resultado cuya posteridad es indiscutible. Remitimos al lector interesado en saber más sobre la Ley de los Grandes Números al excelente artículo *Del Ars Conjectandi al Valor en Riesgo* de Begoña Fernández y Beatriz Rodríguez que también aparece publicado en este número de Miscelánea Matemática.

4. *Ars Conjectandi*, post mortem

Después de la muerte de Jacob Bernoulli el 16 de agosto de 1705 Jacob Hermann, a petición de Leibniz y de la esposa de Bernoulli, organizó los manuscritos de Bernoulli. El 28 de octubre del mismo año Hermann le escribió a Leibniz diciéndole que el manuscrito de Jacob sobre el arte de conjeturar se encontraba casi completo y que Jacob seguramente lo habría podido terminar si hubiese vivido unos meses más.

> Ars, quam vocabat, Conjectandi parum ab omnimoda perfectione abest, ultimamque accepisset manum, si vel paucis duntaxat mensibus fato suo supervixisset.[43]

El 14 de noviembre del mismo 1705 Bernard le Bovier de Fontenelle leyó un elogio a Bernoulli ante la Real Academia de Ciencias de París. En su texto, basó su descripción del *Ars Conjectandi* sobre el material que Hermann le había hecho llegar al respecto.

> Il achevoit un grand Ouvrage, *De Arte Conjectandi*, & quoiqu'il n'en ait rien paru, nous pouvons en donner un idée sur la foi de M. Herman. Les Regles d'un jeu étant supposées, & deux Joüers de la même force, on peut, en quelque état que soit une partie, déterminer par l'avantage qu'un des Joüers a sur l'autre, combien il y a plus à parier qui'il gagnera. Le pari change selon tous les differents états où sera la partie, & quand on veur considerer tous ces changements, on trouve quelquefois des Series ou suites de Nombres reglées, & même nouvelles & singulieres.
>
> [...] Quelques grands Mathematiciens, & principalment Mrs. Paschal & Huguens, ont déjà proposé ou resolu des Problémes sur cette matiere, mais ils n'ont fait que l'effleurer, & M. Bernoulli l'embrassoit dans une plus grande étenduë, & l'approfondissoit beacoup davantage. Il la portoit même jusque'aux choses Morales & Politiques,& c'est là ce que l'Ouvrage doit avoir de plus neuf, & de plus surprenant.[44]

[43] Ver [18, p. 285]. [El Ars Conjectandi, como él lo nombró, dista muy poco de estar completo, y le hubiera dado la última mano si hubiese sobrevivido a su destino unos meses.]

[44] Ver [11]. [El escribió una gran obra *De Arte Conjectandi* y aunque todavía no se ha publicado nos hemos podido dar una idea con base en lo que nos ha dicho el Sr. Herman. Estando supuestas

Aunque en el texto Fontenelle no da una descripción detallada del trabajo matemático de Bernoulli, y de hecho Kohli comenta en [6, p. 393] que Fontenelle no había comprendido el trabajo de Bernoulli, la descripción que se da fue suficiente para que Montmort tratara de seguir el mismo camino.

En 1706 Jospeh Saurin publicó otro elogio a Bernoulli, esta vez en el *Journal de Sçavans*. La parte de este texto que describe la cuarta parte de la obre de Bernoulli parece mucho más fiel que la apreciación de Fontenelle:

> M. Bernoulli avoit beaucoup travaillé sur les nombres, & surtout il avoit beaucoup étudié la matiere des permutations & des combinaissons. Il avoit bessoin de cette connoissance dans un Ouvrage qu'il méditoit, & qu'il avoit presque achevé quand il est mort. Le titre de l'Ouvrage devoit être, *De Arte conjectandi*. L'Auteur y détermine en effet, & y reduit au calcul, les differens degrez de certitude ou de vray-semblance des conjectures qu'on peut former sur les choses qui dépendent du hazard [...] L'Ouvrage de M. Bernoulli est divisé en quatre parties [...] C'est dans la quatriéme partie que l'Auteur étend sa Méthode [...] Il s'agit de déterminer si en augmentant le nombre des observations, par rapport à un évenment, on augmente aussi en même temps à proportion le degré de probabilité ou d'apparence qu'il y a de trouver le véritable rapport entre le nombre des cas où l'évenement peut arriver, & le nombre de cas où il peut n'arriver pas; en sorte qu'on puisse enfin parvenir à un dégré de probabilité ou d'apparence qui soit audessus de tout degré donné; c'est-à-dire qui soit un véritable certitude.[45]

las reglas de un juego y dos jugadores de igual fuerza se puede determinar para cada etapa del juego cuanto se debe apostar de manera que gana tomando en cuenta la ventaja que un jugador tenga sobre el otro. La apuesta cambia con las diferentes etapas del juego, y cuando se toman en cuenta todos los cambios, en ocasiones se encuentran series o sucesiones de números regulares y a veces nuevos y singulares. [...] Algunos grandes matemáticos, y principalmente los Srs. Paschal y Huguens (sic) habían propuesto o resuelto problemas de esta manera, pero ellos no habían sino tocado [la superficie] y el Sr. Bernoulli los ha colocado en una extensión más grande y profundizado su aplicación. Él incluso los ha llevado a cosas morales o políticas y es aquí en donde esta obra es lo más novedosa y sorprendente.]

[45] Ver [21]. [El Sr. Bernoulli trabajó mucho sobre los números y sobre todo estudió mucho el tema de permutaciones y combinaciones. Él tenía necesidad de este conocimiento en una obra sobre la cual reflexionaba y que estaba casi terminada cuando murió. El título de la obra debería ser *De Arte Conjectandi*. El autor determina y reduce al cálculo los diferentes grados de certidumbre o de [probabilidad] de las conjeturas que se pueden formar sobre las cosas que dependen del azar [...] La obra del Sr. Bernoulli se divide en cuatro partes [...] es en la cuarta parte en la que el autor extiende su método [...] Se trata de determinar si al aumentar el número de observaciones, con relación a un evento, también se aumenta proporcionalmente el grado de probabilidad o de apariencia que debe encontrar la razón verdadera entre el número de casos en los cuales se puede presentar el evento y el número de los casos en los que no puede ocurrir; de manera que uno pueda

Después de un largo periodo de indecisión familiar durante el cual el manuscrito del *Ars Conjectandi* estuvo en posesión de la esposa e hijo de Bernoulli, quienes lo mantuvieron fuera del alcance de Johann Bernoulli, finalmente se publicó en 1713 en Basilea por los hermanos Thurneysen. La decisión de publicarlo se debió en parte a la aparición de la segunda edición del *Essay d'analyse* de Montmort que incluía nuevas cartas entre Nicolaus y Johann Bernoulli. Fue el hijo de Jacob Bernoulli, llamado también Nicolaus, quien entregó la obra al impresor y no Nicolaus I como se ha confundido en ocasiones.

Poco tiempo después de la publicación, en marzo de 1714, Leibniz le escribe una carta a Louis Bourguet en la que se atribuye a sí mismo el hecho de que Jacob Bernoulli se haya interesado en temas de probabilidad:

> L'art de conjecturer est fondée sur ce qui est plus ou moins faciles, ou bien plus ou moins faisable [...] par exemple, avec deux dés, il est aussi faisable de jetter douze points, que d'en jetter onze[46] [...] Le Chevalier de Meré (Auteur du livre des Agremens) fut le premier qui donna occasion à ces meditations, que Messieurs Pascal, Fermat et Hugens poursuivirent. Monsieur le Pensionaire de Wit et Monsieur Hudde ont aussi travaillé là dessus depuis. Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette matiere sur mes exhortations.[47]

Como la propia correspondencia que hemos analizado entre Leibniz y Jacob Bernoulli muestra, esta interpretación de lo ocurrido por parte de Leibniz dista un poco de la realidad.

5. Comentario Final

Es claro que la historia del *Ars Conjectandi* no termina con su publicación, incluso se podría considerar que apenas comienza. Pero esa historia, la que ha de contar los trescientos años de vida del *Ars Conjectandi*, será tema de otro artículo.

---

llegar a un grado de probabilidad que se encuentre por encima de cualquier grado dado; es decir, que sea una verdadera certeza.]

[46] Vale la pena notar que Leibniz comete un error sobre este punto.

[47] Ver [16, p. 569-570]. [El arte de conjeturar se funda sobre lo que es más o menos fácil, o más o menos factible [...] por ejemplo, con dos dados, es igual de factible tirar doce puntos que tirar once [...] El Caballero de Meré fue el primero que dio lugar a estas meditaciones que los Srs. Pascal, Fermat y Hugens siguieron. El Sr. de Wit y el Sr. Hudde también han trabajado sobre esto. El finado Sr. Bernoulli cultivó estas nociones debido a mis exhortaciones.]

Bibliografía

[1] A. Arnauld y P. Nicole, *La logique ou l'art de penser*, 1662.

[2] J. Bernoulli, «Problème proposé par M. Bernoulli, Mathematicien de la ville de Basle», *Journal des Sçavans*, vol. 26. VIII, 1685, 314.

[3] ______, «Analysis problematis ante hac propositi, de inventione linea descensus a copore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequales altitudines emetiatur:& alterius cujusdam problematis propositio», *Acta Eruditorum*, 1690, 217–219.

[4] ______, «J. B. Quæstiones nonnullæde usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685, artic. 25», *Acta Eruditorum*, 1690, 219–223.

[5] ______, *Ars Conjectandi*, Basilea, 1713.

[6] ______, *Die Werke von Jakob Bernoulli, 3*, Basilea, 1975.

[7] J. Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 1*, Basilea.

[8] G. Cardano, *Liber de ludo aleae*, 1663.

[9] P. Dupont y C. S. Roero, «Il Trattato "De Ratiociniis in Ludo Aleae" di Christiaan Huygens con le "Annotationes" di Jakob Bernoulli ("Ars Conjectandi", Parte I) Presentati in Traduzione Italiana, con Commento Storico-Critico e Risoluzioni Moderne», *Memorie della Acad. Scienze Torino*, vol. Serie V, Vol. 8, 1984, .

[10] P. d. Fermat y B. Pascal, *La geometría del azar. La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal*, 2007, trad. Basulto Santos, Jesús y Camúñez Ruiz Jose A, Nivola.

[11] B. Fontenelle, «Eloge de M. Bernoulli», *Histoire de l'Académie royale des sciences*, 1705, 139–150.

[12] C. Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, 1657.

[13] ______, *Oeuvres Complètes*, Société Hollandaise des Sciences, Nijhoff, La Haya, 1888-1950.

[14] G. W. Leibniz, *De conditionibus*, 1665.

[15] ______, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, Acta Eruditorum, 1684.

[16] ______, *Die Philosphischen Schriften*, Band III, Berlín, 1887.

[17] ______, *Mathematische Schriften, 2*, Olms, 1971.

[18] ______, *Mathematische Schriften, 4*, Olms, 1971.

[19] P. R. d. Montmort, *Essai d'analyse sur les Jeux de Hazard*, 1708.

[20] S. D. Poisson, *Probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilitiés*, Bachelier, París, 1837.

[21] J. Saurin, «Eloge de M. Bernoulli, cy-devant Professeur de Mathématique à Bâle», *Journal des Sçavans*, 1706, 81–89.

[22] F. v. Schooten, *Exercitationum Mathematicarum*, 1657.

[23] I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability*, Cambridge, 1865.